

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

**ENTROPÍA DE ENTRELAZADO EN TEORÍA DE
CAMPOS Y HOLOGRAFÍA.
APLICACIONES AL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN**

Eduardo Testé Lino
Doctorando

Dr. Horacio Casini
Director

Miembros del Jurado
Dr. C. Fosco (Instituto Balseiro)
Dr. P. Cornaglia (Instituto Balseiro)
Dr. J. I. Latorre (Universidad de Barcelona)

21 de Abril de 2018

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Índice de símbolos

GR	Grupo de Renormalización
UV	Ultravioleta
IR	Infrarojo
QFT	Teoría Cuántica de Campos
CFT	Teoría Cuántica de Campos Conforme
EE	Entropía de entrelazado
SSA	Subaditividad Fuerte
RT	Ryu-Takayanagi
ANEC	Condición promediada de energía nula
QNEC	Condición cuántica de energía nula

Índice de contenidos

Índice de símbolos	iii
Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Resumen	xv
Abstract	xvii
1. Introducción	1
2. Entrelazado en Teoría de Campos y Holografía	7
2.1. Algunos elementos de Información Cuántica	8
2.1.1. Entropía de von Neumann y entropía de Rényi	11
2.1.2. Entropía Relativa	13
2.1.3. Información Mutua	15
2.1.4. Hamiltonianos modulares	15
2.1.5. Estados Markovianos	17
2.2. Información Cuántica en Teoría de Campos	21
2.2.1. Teorema de Reeh-Schlieder	24
2.2.2. Teorema de Bisognano-Wichmann	27
2.2.3. Teorema de Tomita-Takesaki	32
2.2.4. Método de réplicas para calcular la entropía	35
2.2.5. Entropía de un intervalo para una CFT en dos dimensiones . . .	39
2.2.6. Entropía de una esfera para una CFT en d dimensiones	43
2.2.7. Hamiltoniano modular de una esfera para el vacío de una CFT .	46
2.2.8. La entropía de la $(d - 2)$ -esfera y la energía libre en la d -esfera .	50
2.2.9. La entropía de entrelazado como límite de la información mutua	54
2.3. Entropía de Entrelazado en Holografía	56

3. Irreversibilidad en Teoría de Campos	63
3.1. Esquema general de los Teoremas de Irreversibilidad	65
3.2. Prueba de Zamolodchikov del Teorema c	68
3.2.1. Relación con el flujo en el espacio de acoplamientos	72
3.2.2. Positividad de reflexión	73
3.3. Prueba de Komargodski-Schwimmer del Teorema A	76
3.4. Prueba de Casini-Huerta de los Teoremas c y F	83
3.4.1. Teorema c entrópico	83
3.4.2. Teorema F entrópico	87
4. Teoremas del Área	93
4.1. Fórmulas para el término de área	97
4.2. Relación con los teoremas de irreversibilidad en $d = 2$ y $d = 3$	99
4.2.1. Fermión libre	102
4.3. Realización holográfica del Teorema del Área	104
4.4. Planteo del problema holográfico	105
4.4.1. Descripción gravitatoria	105
4.4.2. Funciones de correlación holográfica	107
4.4.3. Formulación Hamiltoniana	109
4.5. La función de dos puntos del tensor de energía momentos	110
4.5.1. Acción cuadrática	110
4.5.2. Soluciones y pegado de soluciones	113
4.5.3. Cálculo del correlador del tensor de energía momentos	116
4.5.4. La regla de suma holográfica	118
4.6. Aplicaciones	119
4.6.1. Regularización con la información mutua	119
4.6.2. Análisis holográfico de la positividad de reflexión	122
4.6.3. Estructura de los términos p^d	125
4.7. Entropía relativa y teoremas del área	126
4.8. Entropía relativa entre estados de distintas teorías	128
4.8.1. Reducción a una región espacial de estados de teorías distintas	129
4.8.2. Hamiltoniano modular	132
4.8.3. El límite nulo	135
4.8.4. Entropía de entrelazado y regímenes de la entropía relativa	137
4.9. Consecuencias para la entropía de entrelazado	138
4.9.1. Una prueba simple del Teorema- c	138
4.9.2. Monotonidad del término de área en la entropía de entrelazado	139

5. La propiedad Markoviana del Vacío	143
5.1. La propiedad Markoviana en términos de los Hamiltonianos modulares	147
5.2. El plano, el cono, y el cilindro	148
5.3. Hamiltonianos modulares sobre el plano nulo I. Expansión OPE	152
5.3.1. Expansión del producto de operadores de twist	152
5.3.2. Hamiltonianos modulares para bordes arbitrarios sobre el plano nulo	155
5.3.3. Hamiltonianos modulares en el cono nulo	158
5.3.4. Extensión a deformaciones masivas de la CFT	160
5.4. Algunas propiedades matemáticas generales de los flujos modulares	161
5.5. Hamiltonianos modulares sobre el plano nulo II. El álgebra de los H_γ	163
5.5.1. Álgebra de Hamiltonianos modulares en el plano nulo	164
5.5.2. Un álgebra de Virasoro en d dimensiones	165
5.5.3. Positividad	166
5.5.4. Acción de P_f sobre las álgebras	167
5.6. Flujos modulares en el plano nulo. Derivación algebraica	169
5.7. La propiedad Markoviana para las entropías de Rényi	175
5.7.1. Ejemplo: modelo de la información mutua extensiva	178
5.8. Comentarios finales sobre la propiedad Markoviana	178
6. Todas las entropías sobre el cono nulo	181
6.1. Forma universal de las entropías en el cono nulo para una CFT	182
6.1.1. Transformaciones de Lorentz vistas desde el cono nulo	183
6.1.2. Entropías sobre el cono nulo	184
6.1.3. Un enfoque alternativo	189
6.2. Análisis holográfico	190
6.2.1. Regiones con borde en el plano nulo	191
6.2.2. Regiones con borde en el cono nulo	192
6.2.3. Teorías de la gravedad con más derivadas (o correcciones en el acoplamiento λ de 't Hooft)	198
6.2.4. Correcciones $1/N$	201
7. El Teorema A entrópico	203
7.1. La desigualdad es UV finita	205
7.2. Entropía de esferas irregulares y esferas suaves	208
7.2.1. EE para esferas irregulares en flujos del GR holográficos	210
7.3. Teoremas de irreversibilidad	212
8. Conclusiones	219

A. Densidad de esferas irregulares	225
B. Ejemplo: Campo escalar libre de masa m y de masa cero	229
C. Una regularización invariante de Lorentz de la entropía	233
D. Comentarios sobre la presencia de defectos	237
E. Curvaturas extrínsecas sobre el cono nulo	239
Bibliografía	241
Publicaciones asociadas	257
Agradecimientos	259

Índice de figuras

2.1. Evolución causal en espacio de Minkowski. Izquierda: El operador de campo local $\phi(x)$ es cierta combinación de los operadores de campos contenidos en la porción Σ de una superficie de Cauchy. Derecha: Los operadores de campos en la porción Σ de la superficie de Cauchy determinan todos los operadores de campos locales en el completamiento causal de Σ	22
2.2. Espacio de Minkowski M_d . A cada abierto \mathcal{O} le corresponde su completamiento causal, dado por el doble conmutante \mathcal{O}'' de \mathcal{O} . El conmutante \mathcal{O}' de \mathcal{O} es siempre causalmente completo. El álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ es el álgebra de todos los operadores localizados en \mathcal{O}'' . El conmutante de la subálgebra \mathcal{A} asociada a la región \mathcal{O} es el álgebra \mathcal{A}' asociada a la región conmutante \mathcal{O}'	23
2.3. La integral funcional en tiempo Euclídeo que define a la matriz ρ_V del vacío reducido al semiespacio $x_1 > 0$ (región V) puede interpretarse como realizada angularmente. Podemos leer de aquí, en analogía con (2.2.12), que $\rho_V(\alpha, \alpha') = \langle \alpha e^{-2\pi i K_1} \alpha' \rangle$, donde K_1 es el generador de rotaciones.	29
2.4. Campo vectorial ξ^μ que genera los boosts y la evolución modular en la cuña de Rindler. El operador de boost K_1 puede obtenerse de forma local como una integral de la corriente conservada $J_{1\mu}(s) = \xi_1^\nu T_{\mu\nu}(s)$ a través de cualquier superficie de Cauchy Σ dentro de la cuña de Rindler. El flujo modular del vacío reducido a V son los flujos de boosts, y mapean operadores locales a operadores locales dentro de la cuña de Rindler.	31

- 2.5. Espacio de Minkowski. Tomamos como \mathcal{A} la subálgebra de los operadores localizados en la cuña de Rindler derecha, con lo cual \mathcal{A}' será la cuña de Rindler izquierda (dualidad de Haag). El flujo modular σ_t del vacío y del álgebra \mathcal{A} genera automorfismos locales en \mathcal{A} : flujo geométrico a lo largo de las hipérbolas que envía operadores locales en operadores locales dentro de la subálgebra (en este caso la cuña de Rindler derecha). La conjugación modular J envía al operador local $\phi(x)$ de \mathcal{A} a un operador $\tilde{\phi}(\bar{x}) = \Theta U(R_{01}(\pi))\phi(x)(\Theta U(R_{01}(\pi)))^*$ localizado en el punto $\bar{x} = (-x^0, -x^1, x^2, \dots, x^{d-1})$ de \mathcal{A}' que resulta de rotar x , de coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^{d-1})$, en un ángulo π sobre el plano (x^0, x^1) . Θ es el operador de CPT, y $U(R_{01}(\pi))$ el unitario que implementa, en la representación de ϕ , la rotación de π sobre el plano (x^0, x^1) 34
- 2.6. Representación $n = 3$ de la variedad R_n^V por la que se hace la integral funcional que es igual a $\text{Tr}(\rho_V^n)$. Esta se construye indentificando los bordes de tiempo $t = 0^+$ y $t = 0^-$ de V de las copias correspondiente y de forma cíclica. 37
- 2.7. En QFT, la contribución principal a la EE de un estado global reducido a una región \mathcal{A} del espacio viene del entrelazado entre los grados de libertad cercanos y dispuestos en lados opuestos de la superficie de entrelazado $\partial\mathcal{A}$. Esta contribución es extensiva a lo largo de $\partial\mathcal{A}$. Por ejemplo, por la localidad del Hamiltoniano, el entrelazado entre el grado de libertad en el punto 1 con el grado de libertad en el punto 3 o en el punto 4, siempre será menor que con el grado de libertad en el punto 2, el “más cercano” al punto 1 (dada una regularización) y que está dentro de la región \mathcal{A} . Como consecuencia, en QFT la EE es UV divergente y extensiva a lo largo de $\partial\mathcal{A}$ 44
- 2.8. Desarrollo causal \mathcal{D} de una esfera de radio R en la superficie de Cauchy de tiempo $t = 0$ en el espacio de Minkowski. El tiempo apunta en la dirección vertical. Se muestran unas líneas del flujo modular (de parámetro τ) del Hamiltoniano modular local $H_{\mathcal{D}}$ de una esfera y para el vacío de una CFT. 46
- 2.9. Arreglo geométrico para calcular la entropía de entrelazado de la región \mathcal{A} usando la información mutua. 55
- 2.10. La dualidad holográfica AdS/CFT relaciona una teoría de gravedad y otros campos materiales en un espacio asintóticamente AdS en $d + 1$ dimensiones con una teoría de campos sin gravedad en un espacio de Minkowski M_d de d dimensiones. 57

- 2.11. Prescripción holográfica de Ryu y Takayanagi para calcular la entropía de entrelazado $S(\mathcal{A})$ de una región \mathcal{A} a tiempo $t = 0$ en M_d . $S(\mathcal{A})$ viene dada por el área de la superficie de área mínima $m_{\mathcal{A}}$ en el bulk sostenida en el borde $\partial\mathcal{A}$ de \mathcal{A} , $S(\mathcal{A}) = (4G_N^{(d+1)})^{-1}\text{area}(m_{\mathcal{A}})$. La métrica $g_{|\Psi\rangle}$ asintóticamente AdS es dual al estado $|\Psi\rangle$ en la teoría del borde M_d . Por la geometría de AdS cerca del borde, el área de $m_{\mathcal{A}}$ se hace infinita si la extendemos hacia el borde M_d de AdS , por lo que la calculamos hasta un valor cutoff de la coordenada holográfica $z = z_0$. La divergencia principal del área de $m_{\mathcal{A}}$ es proporcional al área de $\partial\mathcal{A}$, como corresponde a una entropía de entrelazado $S(\mathcal{A})$ en QFT. 60
- 2.12. Geometría asintóticamente AdS con agujero negro. En estos casos las superficies mínimas $m_{\mathcal{A}}$ y $m_{\bar{\mathcal{A}}}$, holónomas con \mathcal{A} y $\bar{\mathcal{A}}$ respectivamente, nos son iguales, con lo cual $S(\mathcal{A}) \propto \text{area}(m_{\mathcal{A}}) \neq \text{area}(m_{\bar{\mathcal{A}}}) \propto S(\bar{\mathcal{A}})$. La imagen de la izquierda muestra un cuadro típico de esto. La imagen del centro muestra una transición que ocurre cuando el tamaño de la región \mathcal{A} es del orden del inverso de la temperatura. A partir de cierto punto en que la región \mathcal{A} se hace muy grande, la superficie de área mínima $m_{\mathcal{A}}$ tiene dos componentes, una que envuelve al agujero negro, y otra que termina en $\partial\mathcal{A}$, que coincide con $m_{\bar{\mathcal{A}}}$. La imagen derecha muestra el caso en que \mathcal{A} es todo el espacio, en cuyo caso $m_{\mathcal{A}}$ es el horizonte de eventos del agujero negro, y la entropía térmica de la teoría del borde es la entropía de agujero negro en el bulk. 61
- 2.13. Demostración holográfica de la SSA: $S(12) + S(23) \geq S(2) + S(123) \Leftrightarrow \text{area}(m_{12}) + \text{area}(m_{23}) \geq \text{area}(m_2) + \text{area}(m_{123})$. De las imágenes de la izquierda podemos ver que la suma de las áreas de las superficies mínimas m_{12} y m_{23} es igual a la suma de las áreas de las superficies \tilde{m}_2 y \tilde{m}_{123} : $\text{area}(m_{12}) + \text{area}(m_{23}) = \text{area}(\tilde{m}_2) + \text{area}(\tilde{m}_{123}) \geq \text{area}(m_2) + \text{area}(m_{123})$. Esta última desigualdad debido a que m_2 y m_{123} son las superficies de área mínima con bordes sobre las regiones 2 y 123 respectivamente. 62
- 3.1. Espacio de las constantes de acoplamiento g_1, g_2, g_3 en una familia de Lagrangianos que definen distintas teorías. Las teorías de campos son trayectorias y las teorías conformes son puntos específicos. 67
- 3.2. Contorno de integración en el plano complejo s 82

3.3. Izquierda: Para las subálgebras asociadas con las regiones causalmente completas A y B , la SSA no se cumple en general pues no existe ninguna superficie de Cauchy común a ambas. Derecha: disposición correcta de las regiones A y B para poder aplicar la SSA. A y B comparten una superficie de Cauchy común, compuesta de las superficies 1, 2 y 3, cuyas álgebras de operadores asociadas conmutan entre si, por estar 1, 2 y 3 a distancia espacial entre si.	84
3.4. Diagrama espacio-temporal de Minkowski en $d = 2$. La dirección temporal es la vertical y la espacial la horizontal. Las líneas discontinuas a 45 grados son rayos de luz que forman un cono. Los extremos de los intervalos boosteados A y B , están sobre ese cono. Se destacan los correspondientes completamientos causales de los intervalos, regiones dónde se localizan los operadores de las álgebras asociadas. La superficie de Cauchy común a A y B , $1 \cup 2 \cup 3$, tiene las porciones 1 y 3 sobre intervalos nulos.	85
3.5. El álgebra $A \cap B$ está asociada a los operadores localizados en el diamante chico que resulta de intersectar los desarrollos causales de A y B . Esta álgebra es generada por los operadores localizados en el intervalo horizontal representado por la misma letra $A \cap B$. El álgebra $A \cup B$ está asociada a los operadores localizados en el diamante grande que resulta del desarrollo causal de las regiones A y B juntas. Esta álgebra es también la generada por los operadores localizados en el intervalo horizontal representado por la misma letra $A \cup B$	86
3.6. En línea discontinua, las funciones c -entrópicas del escalar (S) y el fermión (F) libres de masa m . En línea continua las funciones $c(x)$ de Zamolodchikov para el escalar (S) y el fermión (F) libres de masa m	87
3.7. Esferas boosteadas y uniformemente distribuidas sobre el cono nulo. La unión de distintos grados de intersecciones de estas esferas forman esferas irregulares como la resaltada.	89
4.1. Arreglo geométrico holográfico para calcular la entropía de una franja: La franja s es la región entre los planos (líneas discontinuas). Los planos se extienden en las coordenadas $\{x_2, x_3, \dots\}$ y están separados en la dirección x_1 una distancia l (ancho de la franja). \tilde{z} es la coordenada radial del bulk, y \tilde{z}^* es el máximo que penetra la superficie A_s en el bulk. δ es un cutoff UV y $A_{ }$ la unidad de área en los planos.	121
4.2. Diferentes superficies de Cauchy Σ y Σ' con el mismo completamiento causal \mathcal{D} ; Σ_{gl} es una superficie de Cauchy global.	130

4.3. Campo vectorial ξ^μ generador del flujo modular geométrico en el completamiento causal de una esfera. $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma$ viene dado por el flujo de ξ^μ a través de la superficie de Cauchy Σ . $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_{\Sigma_{\text{nula}}} = 0$ sobre la superficie de Cauchy nula Σ_{nula} para el rango de perturbaciones discutido en el texto. La divergencia del campo vectorial ξ^μ integrada en el volumen espacio-temporal sombreado nos da $\Delta\mathcal{H}_{\Sigma'} - \Delta\mathcal{H}_\Sigma$, y con esto, la variación de la entropía relativa al cambiar la superficie de Cauchy de Σ a Σ'	134
5.1. Disposición geométrica: plano nulo \mathcal{P} paralelo al vector $\xi = (1, 1, 0, \dots)$, con una curva arbitraria $\gamma(x^\perp)$. La región R_γ es el completamiento causal de una superficie de Cauchy con borde en $\gamma(x^\perp)$	144
5.2. Cono nulo en el espacio de Minkowski. Las esferas sobre el cono que pasan por el punto i son mapeadas a planos sobre el plano nulo con la transformación conforme (5.2.1). Todas las otras esferas (en verde) son mapeadas a regiones parabólicas en el plano nulo. El punto i y la línea roja nula son mapeadas a infinito.	149
5.3. El cilindro: donde los dos bordes verticales son identificados. El espacio de Minkowski es conforme al diamante representado con líneas discontinúas. El flujo modular del diamante o cono doble A dentro del espacio de Minkowski mueve a las regiones dentro de A hacia el punto futuro de A (para tiempos modulares positivos) y a regiones D dentro del complemento hacia el punto pasado del complemento en el cilindro. Para algunos valores finitos del tiempo modular un punto en el complemento cruzará el borde pasado nulo del espacio de Minkowski, convirtiendo al flujo en no local desde el punto de vista de Minkowski. Sin embargo, el flujo sigue siendo local en el cilindro.	151
5.4. Izquierda: operadores de twist $D_n(\Delta x^+)$ y $D_n(0)$ en el espacio de Minkowski asociados a los bordes de una franja \mathcal{R} de bordes paralelos y rectos. Derecha: operadores de twist $D_n(\Delta x^+)$ y $D_n(\gamma)$ en el espacio de Minkowski asociados a los bordes de una franja \mathcal{R}_γ con el borde inferior curvo pero sobre el plano nulo (curva γ).	153
5.5. Plano nulo. Familia de curvas que se mueven entre si por la traslación modular asociada a las dos curvas discontinúas.	170
5.6. Plano nulo. Parábola γ_1 , curva γ_2 , y elemento γ_τ de la familia, trasladado de γ_1 por la traslación modular $T_{\gamma_1, \gamma_2}(\tau)$. Todas las álgebras y regiones γ_τ son movidas geoméricamente por γ_2 , así como sus uniones e intersecciones. De esta forma, trasladando parábolas puedo aproximar cualquier curva arbitraria, y se concluye que γ_2 , arbitraria, mueve cualquier otra curva, arbitraria, geoméricamente, para el vacío de una CFT.	172

6.1. Región espacio-temporal en Minkowski con borde sobre el cono nulo.	182
6.2. Superficie extrema en el bulk anclada en la superficie $r = \gamma(\Omega)$ del borde. Esta superficie está sobre un cono nulo en el bulk.	195
7.1. Deformaciones de las esferas sobre el cono nulo para que su intersección y unión sean suaves.	206
7.2. De la concavidad de $\Delta S(a)$ ($\Delta S''(a) < 0$) se obtiene que la pendiente $\Delta\mu_{d-2}$ en el IR es menor que en el UV, y que la recta tangente a $\Delta S(a)$ en a corta el eje vertical en la coordenada positiva $n(a) = \Delta S(a) -$ $a\Delta S'(a) > 0$, dado que $\Delta S(0) = 0$. En $d = 4$, $n(a) = -2\Delta A \log(m^2 a) +$ $\Delta\mu_0 + 2\Delta A > 0$, y no podemos asegurar que $\Delta A \neq 0$ si $\Delta S''(a) < 0$, pues puede ocurrir que el término constante no universal $\Delta\mu_0 \neq 0$	216
A.1. Proyección espacial de 8 esferas uniformemente distribuídas en el ángulo sólido espacial. La intersección de las esfereas $X_1 \cap X_2 \cap X_3$, máximamente empaquetadas en el ángulo sólido $\Omega(\theta)$ alrededor de X_2 , está resaltada en rojo. La esfera irregular de orden $k = 3$ está resaltada en negro.	226
C.1. Subaditividad fuerte de la entropía regularizada $S_{\text{reg}}(\gamma)$ para las regiones γ_A y γ_B con intersección y unión suaves. Los framings de γ_A y γ_B pueden ser elegidos de forma compatible, o sea, son tales que los framings que resultan para la unión y la intersección son suaves.	235

Resumen

En esta Tesis se estudian las Teorías Cuánticas de Campos y algunas de sus propiedades desde el punto de vista de la Teoría de la Información Cuántica. Específicamente, se estudia la entropía de entrelazado y la entropía relativa del vacío con el objetivo de su aplicación a la irreversibilidad del grupo de renormalización. El resultado principal es una prueba del Teorema *A* (irreversibilidad del grupo de renormalización en dimensión espacio-temporal $d = 4$), como consecuencia de la subaditividad fuerte de la entropía de entrelazado del vacío, la invariancia de Lorentz y lo que hemos llamado la propiedad Markoviana del vacío. Demostramos esta última propiedad en detalle, que equivale a la saturación de la subaditividad fuerte de la entropía de von Neumann y a una identidad sobre los Hamiltonianos modulares de regiones con borde en el plano o el cono nulo. Se derivan expresiones explícitas y generales para los Hamiltonianos modulares y las entropías de von Neumann y de Rényi del vacío reducido a estas regiones. Esto nos permite ofrecer un cuadro unificado de los teoremas de irreversibilidad del grupo de renormalización en dimensión $d = 2, 3, 4$ como consecuencia de propiedades de la entropía de entrelazado del vacío de una Teoría Cuántica de Campos.

Palabras clave: ENTROPÍA DE ENTRELAZADO, GRUPO DE RENORMALIZACIÓN, TEOREMAS C

Abstract

In this Thesis we study Quantum Field Theories and some of its properties from the point of view of Quantum Information Theory. Especially, we study the entanglement entropy and relative entropy of the vacuum state with the goal of applying it to the irreversibility of the renormalization group. The main result is a proof of the *A*-theorem (irreversibility of the renormalization group in $d = 4$ space-time dimensions), as a consequence of the strong subadditivity of entanglement entropy, Lorentz invariance and what we have called the Markov property of the vacuum state. We prove this last property in detail, which is equivalent to the saturation of the strong subadditivity of von Neumann entropy and a certain identity between the modular Hamiltonians of space-time regions with boundary on a null plane or a null cone. We obtain explicit and general expressions for the modular Hamiltonian, von Neumann and Rényi entropies for the vacuum state reduced to these regions. With this we are able to give a unified picture of the irreversibility theorems of the renormalization group in $d = 2, 3, 4$ dimensions as a consequence of properties of the entanglement entropy of the vacuum of a Quantum Field Theory.

Keywords: ENTANGLEMENT ENTROPY, RENORMALIZATION GROUP, C THEOREMS

Capítulo 1

Introducción

La entropía de entrelazado, y en general, los conceptos y las cantidades de la Teoría de la Información Cuántica, han tenido una amplia variedad de aplicaciones en los últimos años en casi todas las ramas de la Física Teórica, incluyendo Materia Condensada, Relatividad General, Teoría de Campos y Holografía [1–10]. En computación cuántica, el entrelazado es uno de los recursos que puede ser explotado para realizar ciertos tipos de cálculos a una velocidad que no podría lograrse clásicamente [11]. La entropía de entrelazado ha sido utilizada como parámetro de orden para distinguir fases que no pueden ser identificadas por su simetría [1, 12], y para localizar y caracterizar puntos críticos en transiciones de fases [8, 13–15]. Un ejemplo importante en holografía es la fórmula de Ryu-Takayanagi [2] para el cálculo de la entropía de entrelazado de una región. Esta fórmula generaliza la expresión de la entropía de agujero negro y ha ayudado sustancialmente a detallar el diccionario holográfico AdS/CFT [16–19]. En particular, características como la continuidad y emergencia del espacio-tiempo resultan del entrelazado de los grados de libertad de la teoría dual [20]. En teoría de campos, la entropía de entrelazado tiene la importante propiedad de crecer como el área, y no como el volumen de la región [21–23]. El primer indicio de esta dependencia con el área se observó al intentar explicar el origen estadístico de la entropía de agujero negro como una entropía de entrelazado [24–26].

La entropía de entrelazado es una cantidad no local que puede usarse o definirse (aún cuando es divergente ultravioleta) en cualquier Teoría de Campos, y su dependencia con los parámetros de la teoría es tan vasta que de ella en principio podría extraerse toda la información que define a la teoría misma. En particular, la entropía de entrelazado de regiones simples, como cilindros o esferas, tiene información sobre las cargas centrales de una Teoría Cuántica de Campos Conforme [27–29]. La Teoría de la Información Cuántica provee técnicas poderosas para entender aspectos no perturbativos de las Teorías de Campos. Una forma en la que esto puede realizarse es aplicando desigualdades como la subaditividad fuerte de la entropía de von Neumann

o la monotonidad de la entropía relativa [30–36]. Estas desigualdades nos dan una perspectiva muy interesante sobre aspectos no triviales de estas teorías, y que contrastan con las que comunmente se obtienen de la causalidad y unitariedad, y que en general, son difíciles de reconocer por medio de observables locales. Algunos ejemplos de esto son las implicaciones sobre las condiciones de energía [35, 37–39], y como veremos en esta Tesis, la irreversibilidad del grupo de renormalización en varias dimensiones [31, 32, 40–43].

Sobre la irreversibilidad del grupo de renormalización, el Teorema c de Zamolodchikov [44] es uno de los resultados más relevantes sobre el comportamiento de las teorías en dimensión $d = 2$. Este teorema prueba que existe de una función monótona c que interpola entre las cargas centrales de las Teorías Cuánticas de Campos Conformes (CFT) en los puntos fijos de los extremos de un flujo del grupo de renormalización, estableciendo la irreversibilidad de este en $d = 2$. Dicho de otra forma, este teorema limita la clase de CFTs que se pueden encontrar al final del flujo del grupo de renormalización, a aquellas que tienen carga central c menor que la de la CFT del punto fijo ultravioleta.

En un intento de generalizar este teorema a dimensiones mayores, Cardy conjeturó (1988) [45] que era cierto tipo de carga central de las CFTs en dimensión $d = 4$, el coeficiente de Euler A en la anomalía de traza o anomalía de Weyl de la CFT, la cantidad correcta que podría estar ordenada ante flujos del grupo de renormalización, conjetura que puede extenderse a toda dimensión par. Esta conjetura, llamada Teorema A , fue demostrada recientemente por Komargodski y Schwimmer (2011) [46]. En dimensión impar, los teoremas c encontraron el gran obstáculo de que no hay anomalías conformes. En este punto, dos contribuciones muy importantes indicaban el camino a seguir. El primero era la observación de que la parte universal finita o el coeficiente del término logarítmico de la entropía de entrelazado de una esfera obedece los Teoremas c en teorías con dual holográfico en cualquier dimensión [47]. La segunda idea, conocida como teorema F , indicaba que el término constante en la energía libre de la CFT en la esfera Euclídea en dimensión impar era monótono ante el grupo de renormalización [48]. Un elemento adicional que dificultó la extensión de los teoremas c a dimensión impar, es que, en contraste con las anomalías, F es una cantidad altamente no local y no aparece en las funciones de correlación. Estas dos conjeturas resultaron ser la misma (en dimensión impar), mientras que el coeficiente del término universal logarítmico en la entropía de entrelazado de esferas en dimensión par es proporcional a la anomalía A [49].

Estos resultados sugieren fuertemente que es el término universal en la entropía de una esfera para el vacío de una CFT (que en dimensión par es el coeficiente del término logarítmico y en dimensión impar es el término constante), el candidato correcto para estar ordenado ante flujos del grupo de renormalización en cualquier dimensión.

Usando propiedades de la entropía de entrelazado, y extendiendo una demostración entrópica alternativa del teorema c [3, 30], el Teorema F fue demostrado en [41] por Casini y Huerta (2012). Además de la unitariedad, la causalidad y la invariancia de Lorentz en QFT, la propiedad clave en estas demostraciones es la subaditividad fuerte (SSA) de la entropía de entrelazado. Holográficamente, la monotonidad ante flujos del grupo de renormalización está relacionada con la condición de energía nula de la teoría gravitatoria dual [47, 50].

La entropía de entrelazado y sus propiedades puede ser entonces el lenguaje adecuado para entender el principio detrás de la irreversibilidad del grupo de renormalización a través de las dimensiones (vease por ejemplo [51]). Sin embargo, hasta el momento, se han empleado técnicas muy distintas en la demostración de estos teoremas, algunas muy específicas de cada dimensión.

La demostración del Teorema A usando las propiedades de la entropía de entrelazado es el principal resultado de esta Tesis [52]. Esto fue posible mediante el análisis y la demostración de un ingrediente clave: La propiedad Markoviana del vacío [42, 52, 53], otro resultado importante en sí mismo.

En el camino se ha obtenido una variedad de resultados relacionados. El coeficiente del término de área en la entropía de entrelazado, aún cuando no corresponda a ningún teorema c , por ser una cantidad no universal o no tener relación con las cargas centrales en los puntos fijos, tiene también un comportamiento monótono ante el flujo del grupo de renormalización. Un enunciado más preciso al respecto, es que en las teorías con escala, existe una parte universal en el término de área de la entropía de entrelazado; una parte que tiene la misma dependencia con la escala de la teoría, independientemente de la regularización usada, y esta parte renormaliza de forma decreciente ante el flujo del grupo de renormalización. Hemos llamado Teorema del Área a este resultado.

La presentación de los resultados de esta Tesis comienza en el Capítulo 4, con dos enfoques independientes sobre el Teorema del Área. En ese capítulo se relaciona la variación del término de área en la entropía con dos cantidades muy distintas: la renormalización de la constante de Newton, y la entropía relativa entre dos estados de vacío. Los Teoremas del Área son relevantes porque, en dimensión $d = 2$, equivalen al Teorema c de Zamolodchikov, y en dimensión $d > 2$, extienden la fórmula de Zamolodchikov para la variación total de la carga central, a la expresión que nos da el cambio en el coeficiente del término de área en la entropía de entrelazado. Una parte importante del Capítulo 4 se emplea en la comprobación holográfica detallada de esto último. En la segunda parte del mismo capítulo se reobtiene el Teorema del Área como consecuencia de las propiedades de la entropía relativa entre los estados de vacíos del punto fijo UV y de la teoría perturbada que implementa un flujo del grupo de renormalización. Uno se encuentra en este caso con sutilezas interesantes, dado que los estados pertenecen a teorías con distinta evolución temporal, y la entropía relativa dependerá

de la superficie de Cauchy en la cual estos estados se comparen. En particular, veremos que para poder extraer información sobre el grupo de renormalización, necesitaremos comparar los estados en una superficie de Cauchy extrema, la superficie nula. Como resultado se obtiene además una nueva demostración del Teorema c en $d = 2$, dado que la distinguibilidad de estos estados, medida por la entropía relativa, resulta controlada por la diferencia de las cargas centrales.

A partir del Capítulo 5 comienza la exposición de los resultados con vistas a demostrar el Teorema A en dimensión $d = 4$, principal aporte de esta Tesis. En el Capítulo 5 se enuncia y demuestra lo que hemos llamado la propiedad Markoviana del vacío. En el caso cuántico, un estado se dice Markoviano si satura de la desigualdad de la subaditividad fuerte de la entropía de von Neumann o entropía de entrelazado, propiedad que limita en gran medida la misma estructura de entrelazado del estado. Demostraremos que el vacío de cualquier Teoría de Campos es un estado Markoviano respecto de las álgebras asociadas a regiones espacio-temporales con borde sobre el plano nulo, y para el caso del vacío de una CFT, con borde sobre el cono nulo. Esto lo haremos de varias formas, una de las cuales nos condujo a otro resultado relevante: la determinación de la forma explícita de los Hamiltonianos modulares del vacío reducido a regiones con borde sobre el plano nulo. El Hamiltoniano modular de un estado ρ reducido a una región o subálgebra X es un operador definido por

$$H_X = -\log \rho_X . \quad (1.0.1)$$

Este es el generador de un grupo uniparamétrico de automorfismos dentro del álgebra $U(t) = e^{-iH_X t}$, llamado flujo modular, y respecto del cual el estado ρ_X es térmico, e invariante ante el flujo modular. En Teoría de Campos H_X es en general un operador no local y extremadamente complejo. Uno de los casos más importantes y simples en donde H_X se conoce es para el estado de vacío y para la región X que describe el completamiento causal de la mitad del espacio (cuña de Rindler)¹. En otras palabras, la forma explícita obtenida en esta Tesis para los Hamiltonianos modulares de regiones con borde sobre el plano o el cono nulos generaliza dos resultados relevantes: el Hamiltoniano modular del espacio de Rindler para el vacío de cualquier QFT, y el Hamiltoniano de la esfera para el vacío de una CFT, a deformaciones arbitrarias de estas regiones sobre el plano y el cono nulo respectivamente. En relación con esto, se obtiene además el álgebra infinito dimensional de las transformaciones que preservan la Markovianidad del vacío, álgebra que puede extenderse a una tipo Virasoro, pero en

¹Para la forma explícita de otros Hamiltonianos modulares, vease: [49, 54] para el Hamiltoniano modular del estado de vacío de una CFT reducido a una esfera, y [55] para regiones no conexas, donde se da la forma explícita del Hamiltoniano modular para el vacío del fermión libre no masivo en $d = 2$ reducido a dos intervalos. La teoría del fermión libre no masivo en $d = 2$ también tiene la curiosa propiedad de tener información mutua extensiva, $I(A, B \cup C) = I(A, B) + I(A, C)$.

dimensión d y con carga central divergente ultravioleta, y que podría ser relevante en otros contextos.

La propiedad Markoviana es consecuencia de la geometría del plano nulo en el espacio de Minkowski. De hecho, esta geometría es tan restrictiva, que el vacío no solo es Markoviano (satura la SSA para regiones con borde sobre el plano nulo), sino que es Rényi-Markoviano: la combinación

$$S_n(A) + S_n(B) - S_n(A \cup B) - S_n(A \cap B) = 0, \quad (1.0.2)$$

es igual a cero para todas las entropías de Rényi S_n de parámetro n . Esto es consecuencia de la independencia de la entropía de von Neumann y de Rényi de la forma del borde de la región sobre el plano nulo, que es una condición más fuerte que la Markovianidad. Se discuten las consecuencias que esto tiene sobre la estructura de entrelazado del vacío, limitándose aún más la estructura de este a ser de tipo producto (que no debe confundirse con ser un estado producto).

La propiedad Markoviana del vacío de una CFT permite determinar la forma explícita de todas la entropía de entrelazado y de Rényi de regiones con borde sobre el cono nulo. La estructura de estas viene dada por la acción efectiva en dos dimensiones menos de un campo tipo dilatón, y los términos universales en estas entropías vienen dados por los término anómalos de Wess-Zumino en dicha acción efectiva. Este es el contenido del Capítulo 6. La forma explícita de la entropía de una región con borde sobre el cono nulo en $d = 4$ permite entender con claridad qué es lo que impide aplicar y extender los métodos entrópicos, de dimensión $d = 2, 3$ (basados en el uso de la subaditividad fuerte, la causalidad y unitariedad), a demostrar la irreversibilidad del grupo de renormalización en el caso de $d = 4$. Conociendo que el vacío de la CFT ultravioleta es Markoviano, sí podemos aplicar los métodos anteriores y demostrar el Teorema A, que es el contenido del Capítulo 7.

La Tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 introduciremos algunos elementos sobre entrelazado en sistemas finitos y en Teoría de Campos y Holografía, que serán relevantes o útiles para la lectura de los resultados de la Tesis. En el Capítulo 3, y por completitud de la exposición, se presentarán todas las demostraciones de los teoremas de irreversibilidad del grupo de renormalización en dimensión $d = 2, 3$ y 4. En el Capítulo 4 comenzará la exposición de los resultados propios de la Tesis. Se discutirán los Teoremas del Área y su relación con el Teorema de Zamolodchikov, la renormalización de la constante de Newton, y se presentará una cuenta holográfica detallada del correlador de la traza del tensor de energía-momentos, demostrándose que la integral de este correlador es igual, en efecto, a la renormalización del término de área en la entropía de entrelazado. Se obtiene el mismo resultado considerando la entropía relativa entre dos estados de vacío comparados sobre la superficie nula. En el

Capítulo 5 se enunciará y demostrará por varios métodos la propiedad Markoviana del vacío. En el Capítulo 6 se determina la forma general de las entropías de entrelazado y de Rényi para regiones con borde arbitrario sobre un cono nulo, y se muestra la relación de este problema con la acción efectiva de un campo dilatón en dos dimensiones menos. Con los resultados de los Capítulos 5 y 6, demostramos en el Capítulo 7 el Teorema *A*, y unificamos los teoremas de irreversibilidad del grupo de renormalización, como una consecuencia de las propiedades de la entropía de entrelazado.

Capítulo 2

Entrelazado en Teoría de Campos y Holografía

En este Capítulo presentamos algunas definiciones y resultados básicos de la Teoría de la Información Cuántica en Teoría de Campos (QFT) y Holografía. Comenzaremos dando una presentación breve de los conceptos de entrelazado y reducción de un estado en el sentido algebraico, para luego definir la entropía de von Neumann, la entropía de Rényi, la entropía relativa, la información mutua, el Hamiltoniano modular, y los estados Markovianos, destacándose las propiedades de estos que son relevantes para la Tesis.

En la segunda parte se discuten varios resultados conocidos sobre estas cantidades en QFT. Comenzamos presentando ciertos elementos estructurales básicos de una QFT, seguido de la discusión de tres teoremas importantes al respecto: el teorema de Reeh-Schlieder, que caracteriza el vacío de cualquier QFT (relativista) como un estado siempre entrelazado entre cualesquiera subálgebras asociadas con regiones espacio-temporales, el teorema de Bisognano-Wichmann, que relaciona el Hamiltoniano modular del vacío reducido a un semiespacio con el operador que implementa la simetría de boost del grupo de Lorentz, y el teorema de Tomita-Takesaki, un teorema algebraico general, pero con importantes aplicaciones sobre la estructura no perturbativa de las QFTs, y que servirá de antesala a los teoremas sobre semi-inclusión modular que aplicaremos en el Capítulo 5 para probar la estructura Markoviana del vacío.

Una vez cubierto esto, repasaremos varios resultados sobre la entropía de entrelazado (EE) en QFT: método de réplicas para calcularla y su aplicación para determinar la entropía de entrelazado de un intervalo para el vacío de una CFT en $d = 2$ dimensiones, y su relación con la carga central c . La estructura de divergencias ultravioleta general de la EE en d dimensiones y la forma particular que esta adquiere en el caso de esferas y para el vacío de una CFT, y los términos universales A y F contenidos en esta. Se demuestra la conexión de estos términos universales con el coeficiente A del término

de Euler en la anomalía de traza de una CFT en dimensión par, y con la parte finita F de la energía libre de la función de partición de la CFT en la d -esfera Euclídea en dimensión impar. Se presenta y se discute la forma general del Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a una esfera, y la regularización de la EE con ayuda de la información mutua. Finalizamos presentando la prescripción de Ryu-Takayanagi para calcular la EE holográficamente.

2.1. Algunos elementos de Información Cuántica

Los teoremas y las propiedades de las cantidades de la Teoría de la Información Clásica [56] sufren grandes alteraciones cuando se refieren a la información que se almacena y se manipula en estados cuánticos. Una de las características más distintivas de la teoría cuántica, que no tiene paralelo clásico, es el entrelazamiento. Para discutir tal concepto, consideremos un vector $|q\rangle$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, producto tensorial de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B . El vector $|q\rangle$ se dice “separable” en \mathcal{H} , respecto de la partición $(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$, si se puede escribir como:

$$|q\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle, \quad |a\rangle \in \mathcal{H}_A, \quad |b\rangle \in \mathcal{H}_B. \quad (2.1.1)$$

Un vector $|q\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ se dice “entrelazado”, o que está entrelazado respecto de la partición $(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ de \mathcal{H} , si no es separable. Esta definición de estado entrelazado es adecuada para los llamados estados puros, que son aquellos que pueden representarse por un vector en un espacio de Hilbert. En general, en mecánica cuántica, a los estados se le asocian matrices densidad; operadores ρ positivos, autoadjuntos y de traza uno, y a los observables operadores \mathcal{O} autoadjuntos. Los estados puros $|\psi\rangle$ también pueden ser representados por matrices densidad de la forma de proyectores $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. El valor medio del operador \mathcal{O} en el estado ρ se calcula como

$$\langle\mathcal{O}\rangle_\rho = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\rho \mathcal{O}), \quad (2.1.2)$$

donde $\text{Tr}_{\mathcal{H}}$ es la traza en el espacio de Hilbert. En el caso de estados puros, este valor de espectación se reduce a la forma

$$\langle\mathcal{O}\rangle_\rho = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(|\psi\rangle\langle\psi| \mathcal{O}) = \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle. \quad (2.1.3)$$

Desde un punto de vista formal, y en ocasiones más adecuado para la aplicación de los conceptos de la Teoría de la Información a la Teoría de Campos, al conjunto de los observables se le asocia un álgebra \mathcal{A} con la operación de conjugación $*$ (una $*$ -álgebra), y a los estados se le asocian funcionales ρ positivas que actúan sobre esta álgebra $\rho : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$. En este esquema, el valor de expectación de un observable $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$

en el estado ρ es $\rho(\mathcal{O})$. Esta álgebra puede ser representada (no unívocamente) como un álgebra de operadores actuando en un espacio de Hilbert. Si \mathcal{A} viene provista con una funcional traza, algunos estados pueden representarse por un elemento ρ del álgebra de la siguiente forma $\rho(\mathcal{O}) = \text{Tr}(\rho \mathcal{O})$ (este siempre es el caso en dimensión finita). En la representación del álgebra como álgebra de operadores en un espacio de Hilbert este elemento ρ del álgebra es la matriz densidad. Presentamos a continuación las definiciones de reducción de un estado, con distintos grados de generalidad.

Definición (álgebraica de reducción de un estado): Dado un estado ρ_A en el álgebra \mathcal{A} (visto como elemento de \mathcal{A} gracias a la existencia de una funcional traza Tr_A en \mathcal{A}), se define su reducción a la subálgebra \mathcal{B} ($\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$), como el estado ρ_B de \mathcal{B} (visto como elemento de \mathcal{B} gracias a la existencia de una funcional traza Tr_B en \mathcal{B}) que reproduce todos los valores de expectación que ρ_A para todo operador de \mathcal{B} :

$$\text{Tr}_A(\rho_A \mathcal{O}_B) = \text{Tr}_B(\rho_B \mathcal{O}_B) \quad \forall \mathcal{O}_B \in \mathcal{B}. \quad (2.1.4)$$

Aquí el miembro izquierdo de (2.1.4) es dado para todo \mathcal{O}_B de \mathcal{B} , y con esa información buscamos el elemento que queremos, ρ_B de \mathcal{B} . Esta definición es muy general y vale incluso en el caso en que el álgebra no pueda representarse en un espacio de Hilbert que pueda descomponerse tensorialmente en factores. Por ejemplo, el álgebra generada por los operadores de Pauli $(1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ no puede descomponerse en factores, pero la definición (2.1.4) hace que tenga sentido reducir un estado en esta álgebra a la subálgebra generada por los operadores $(1, \sigma_x)$ (que no es un factor de la primera). Cabe mencionar que esta definición nos trae ciertos problemas adicionales en relación con la normalización y la acción de la funcional traza cuando el álgebra se representa como álgebra de matrices. Para que la definición (2.1.4) esté bien definida, debemos exigir que la traza esté normalizada a uno cuando actúa sobre los proyectores mínimos del álgebra (o su representación). Un proyector es un elemento autoadjunto del álgebra igual a su cuadrado. Se establece un orden parcial para los proyectores así: $p \geq q$ si $qp = p$, de donde se da sentido a lo de proyector mínimo. Para más detalles ver el primer Capítulo de [57]. Esto es importante, pues en la entropía de von Neumann aparece una traza, y tiene sentido la frase “la entropía de un estado respecto de una subálgebra” (lo que significa: la entropía de von Neumann del estado reducido a esa álgebra) si la traza que aparece en la definición es tal que hace independiente el resultado de calcular tal entropía de cualquier representación del álgebra que se haga. Por ello, en (2.1.4) las trazas pudieran tener normalizaciones distintas, aun cuando se elija la misma representación para las álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} , dado que los proyectores mínimos pudieran ser distintos.

En el caso en que el álgebra pueda representarse en un espacio de Hilbert que puede

descomponerse en factores, y la subálgebra que nos interesa es el álgebra de operadores que actúa en uno de los factores, la definición (2.1.4) se reduce a

Definición: Dado un estado ρ_{AB} en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, no necesariamente puro, se define su reducción a \mathcal{H}_A , como el estado ρ_A de \mathcal{H}_A que reproduce todos los valores de expectación que ρ_{AB} para todo operador de la forma $\mathcal{O}_A \otimes 1_B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, con $\mathcal{O}_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$:

$$\text{Tr}_{AB}(\rho_{AB} \mathcal{O}_A \otimes 1_B) = \text{Tr}_A(\rho_A \mathcal{O}_A) \quad \forall \mathcal{O}_A \in A. \quad (2.1.5)$$

Esta definición para el estado reducido es equivalente a la de hacer la operación de traza parcial:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}). \quad (2.1.6)$$

En lo que sigue, nos referiremos por “estado reducido” a alguna de estas tres definiciones de forma indistinta, aunque es más natural y conveniente para los temas desarrollados en esta Tesis tener en mente la primera definición.

Una característica importante de los estados separables es la siguiente. Si un estado puro y separable en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ se reduce a \mathcal{H}_A , el estado reducido es también puro. De forma complementaria, si un estado puro en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ se reduce a \mathcal{H}_A , y obtenemos un estado no puro, entonces el estado original es un estado entrelazado. Este hecho hace que los estados entrelazados sean muy fáciles de identificar, y nos da una idea para medir que tan entrelazado es un estado, a partir de medir que tan no pura es la matriz densidad del estado reducido.

Los estados dados por matrices densidad, que pueden ser usados para describir una situación de ignorancia sobre un ensemble estadístico de estados puros, no son un elemento externo al formalismo de la mecánica cuántica sobre estados puros (vectores en un espacio de Hilbert), sino que surgen de forma inevitable y natural al representar a un estado puro en un subsistema, de acuerdo con las definiciones anteriores. En este caso la impureza no resulta de la ignorancia estadística, sino del entrelazado de un estado global puro entre los subsistemas. Producto de esto, todo estado impuro ρ se puede pensar como el reducido a un subsistema de un estado global puro en un sistema mayor. Si $\rho = \sum_{i=1}^n p_i |a_i\rangle_A \langle a_i|_A$ está definido en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_A de dimensión n , en donde $\{|a_i\rangle_A\}$ es una base, podemos siempre hacer una extensión o purificación de ρ a un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, donde \mathcal{H}_B es una copia de \mathcal{H}_A . La extensión o purificación de ρ pudiera ser

$$|\Omega\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i} |a_i\rangle_A \otimes |b_i\rangle_B, \quad (2.1.7)$$

con $|b_i\rangle_B$ una base de \mathcal{H}_B . La reducción de $|\Omega\rangle$ en (2.1.7) al subespacio \mathcal{H}_A es ρ .

Cualquier estado $U_B|\Omega\rangle$, con $U_B = 1_A \otimes \mathcal{U}_B$, y \mathcal{U}_B un unitario en \mathcal{H}_B , es también una purificación de ρ . Tomar una copia \mathcal{H}_B del espacio de Hilbert \mathcal{H}_A siempre permite obtener una purificación de un estado ρ de \mathcal{H}_A , aunque si ρ tiene algunos autovalores iguales a cero, la purificación podría lograrse en un espacio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, con \mathcal{H}_B de dimensión menor que \mathcal{H}_A .

El entrelazado es un recurso que no se puede crear a partir de operaciones locales en los subsistemas y comunicación clásica entre ellos. Este conjunto de operaciones se conoce por sus siglas en inglés por LOCC, de local operations and classical communication. Tanto en el caso puro como en el no puro, un estado es separable entre dos subsistemas si lo puedo construir con LOCCs a partir de un estado producto $\rho_1 \otimes \rho_2$. A través de LOCCs entre dos subsistemas 1 y 2, solo puedo construirme estados de la forma

$$\rho = \sum_k p_k \rho_1^k \otimes \rho_2^k . \quad (2.1.8)$$

Esta es la definición de estado separable en el caso no puro.

2.1.1. Entropía de von Neumann y entropía de Rényi

Existen muchas medidas de la impureza o pureza de un estado. Una de las más usadas y que más aplicaciones encuentra es la entropía de von Neumann. Dado un estado ρ , ésta se define por

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i , \quad (2.1.9)$$

donde λ_i son los autovalores de la matriz ρ . Dada la discusión de arriba, esta entropía también se conoce como entropía de entrelazado (EE), pues siempre puedo pensar a ρ como el resultado de la reducción a un subsistema de un estado puro $|\Omega\rangle$, y $S(\rho)$ mide que tan entrelazado está $|\Omega\rangle$ entre los subsistemas.

La funcional $S(\rho)$ nos da una medida de la distribución de los autovalores de la matriz densidad ρ , es siempre no negativa, igual a cero para estados puros, e invariante ante transformaciones unitarias sobre el estado. En espacios de Hilbert finitos de dimensión n , esta alcanza el máximo de $S(\rho_n) = \log n$ en el estado máximamente mixto $\rho_n = 1/n$. Tiene una importante propiedad que la distingue y la selecciona como la cantidad correcta para representar a la entropía termodinámica cuando el estado de la materia se representa por un estado cuántico. La entropía se comporta de la siguiente forma ante combinaciones convexas $\rho = \sum_k p_k \varphi_k$ de estados φ_k con soporte disjunto

$$S\left(\sum_k p_k \varphi_k\right) = \sum_k p_k S(\varphi_k) + H(\{p_k\}) , \quad (2.1.10)$$

donde $H(\{p_k\}) = -\sum_k p_k \log p_k$ es la entropía clásica de Shannon de la distribución de probabilidad $\{p_k\}$. Que los soportes de los estados φ_k sean disjuntos implica que los autovectores distintos de cero de las φ_k son ortogonales. Físicamente, esto significa que si existe un gas formado por k especies, deben existir filtros con los cuales pueda separar estas especies. De experimentos mentales sobre el proceso de separación de las especies de un gas, mediante separación adiabática a un volumen mayor, seguida de una compresión isotérmica al volumen original, en la que se calcula el cambio de entropía con la entropía termodinámica $dS = \delta Q/T$, se obtiene la expresión (2.1.10), ver [57]. El comportamiento (2.1.10) es uno de los requisitos principales para determinar de forma unívoca a (2.1.9) como el representante, en el caso cuántico, de la entropía termodinámica, asumiendo que $S(\varphi) = 0$ si φ representa un estado puro.

La entropía (2.1.9) también es aditiva ante estados producto $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$,

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2) . \quad (2.1.11)$$

Para los estados de la forma $\rho = \sum_k p_k \sigma_k^1 \otimes \sigma_k^2$, con $\sigma_k^1 \otimes \sigma_k^2$ matrices densidad de soporte disjunto para distintos k , se tiene que, al combinar (2.1.10) y (2.1.11),

$$S\left(\sum_k p_k \sigma_k^1 \otimes \sigma_k^2\right) = \sum_k p_k S(\sigma_k^1) + \sum_k p_k S(\sigma_k^2) + H(\{p_k\}) . \quad (2.1.12)$$

En general, cuando los soportes no son disjuntos, la entropía es una función convexa: si $\rho = \sum_k p_k \varphi_k$, entonces

$$\sum_k p_k S(\rho_k) \leq S\left(\sum_k p_k \varphi_k\right) \leq \sum_k p_k S(\varphi_k) + H(\{p_k\}) . \quad (2.1.13)$$

Muy relacionada con la entropía de von Neumann están las entropías de Rényi S_n , definidas por

$$S_n(\rho) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(\rho^n) . \quad (2.1.14)$$

Las S_n comparten con la entropía de von Neumann las propiedades mencionadas arriba, excepto la de la aditividad (2.1.10). O sea, es extensiva ante productos tensoriales, pero no ante sumas convexas de matrices densidades con soporte disjunto. En el límite de $n \rightarrow 1$ es igual a la entropía de von Neumann:

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho) = S(\rho) . \quad (2.1.15)$$

Esta propiedad es muy explotada para calcular $S(\rho)$ en ciertos contextos, donde se hace complicado el cálculo de la entropía de von Neumann (2.1.9) por la presencia del logaritmo. Como veremos más adelante, el método de réplicas para calcular $S(\rho)$ en

QFT se basa en calcular la entropía de Rényi y luego tomar el límite.

Otra propiedad importante que comparten la entropía de von Neumann y las entropías de Rényi es la siguiente. Dado un estado puro ρ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, la entropía del estado reducido a A , o a B , son iguales:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) , \quad (2.1.16)$$

y lo mismo para las entropías de Rényi. Esto es consecuencia inmediata del teorema de descomposición de Schmidt, que implica que los autovalores de ρ_A y ρ_B son iguales, salvo una cantidad, no necesariamente igual, de autovalores iguales a cero.

2.1.2. Entropía Relativa

Otra cantidad central, de la que se derivan propiedades sumamente útiles (incluyendo las de la entropía de von Neumann) es la entropía relativa. A diferencia de las anteriores, esta se define a partir de dos estados, ρ y σ , y sirve como una medida de la distancia estadística entre ellos. Está definida por

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) , \quad (2.1.17)$$

siempre y cuando el soporte de σ incluya al de ρ , en caso contrario se define como infinito. Lo primero que hay que notar es que la definición (2.1.17) no es simétrica en ρ y σ . Puede ser útil pensar el estado σ como un estado de referencia con el que se va a comparar ρ , y dicha comparación no es simétrica, por lo que $S(\rho||\sigma)$ no es una distancia (en el sentido matemático) en el espacio de estados. Si el segundo estado es puro, la entropía relativa siempre será infinita, a no ser que el primer estado sea igual al segundo. Esta es siempre no negativa, igual a cero solo cuando ρ y σ son iguales, e invariante ante transformaciones unitarias simultáneas sobre ambos estados. Cuando $\sigma = 1/n$ es el estado máximamente mixto, se sigue fácilmente de la definición que $S(\rho||1/n) = -S(\rho) + \log n$. La entropía relativa tiene otras propiedades muy interesantes. Es aditiva ante combinaciones convexas (simultáneas y con el mismo peso en ambos estados) de estados de soporte disjunto, y en general, doblemente convexa. Cumple un interesante teorema parecido al teoremas de Pitágoras (a pesar de no ser una distancia) introduciendo otra operación llamada espectación condicional [58]. Tiene además la siguiente interpretación operacional. Dado el estado conocido de referencia σ , la probabilidad p de confundir a ρ con σ , a juzgar por los resultados de N mediciones experimentales efectuadas sobre ρ , tan bien elegidas como sea posible, dado que conozco σ , viene dada por

$$p \sim e^{-NS(\rho||\sigma)} , \quad (2.1.18)$$

para N grande [7]. Por ejemplo, si σ es puro, en cuyo caso $S(\rho||\sigma) = +\infty$ si $\rho \neq \sigma$, está claro que podemos reconocer eficientemente en unos pocos experimentos que ρ no es σ . Lo medición más eficiente es proyectar en σ . Este sentido operacional hace de la entropía relativa una medida de la distinguibilidad entre dos estados.

La entropía relativa tiene otra propiedad muy importante y de la que se derivan muchas aplicaciones: su monotonicidad ante la inclusión de subálgebras. Si tenemos dos subálgebras, una incluida dentro de la otra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, y dos estados, ρ_A, σ_A , de \mathcal{A} , que se reducen a \mathcal{B} como ρ_B, σ_B , se tiene que

$$S(\rho_B||\sigma_B) \leq S(\rho_A||\sigma_A) \quad \text{para } \mathcal{B} \subset \mathcal{A} . \quad (2.1.19)$$

Esta propiedad es en realidad más general. Se aplica siempre que se actúe sobre los estados con los llamados canales cuánticos, que matemáticamente son operaciones que se conocen, por sus siglas en inglés, por operaciones tipo CPTP: mapeos entre álgebras que son completamente positivos¹ y que preservan la traza. La restricción a una subálgebra es una CPTP, y será un mapeo lo suficientemente general a nuestros propósitos de usar (2.1.19).

Podemos interpretar (2.1.19) de la siguiente forma. Como el álgebra de operadores \mathcal{B} es más chica que \mathcal{A} , tengo menos elementos para distinguir a los estados ρ y σ . En otras palabras, con los operadores en \mathcal{A} puedo hacer más eficientes mis experimentos y distinguir mejor los estados ρ y σ que haciendo experimentos solo con el subconjunto de operadores en \mathcal{B} .

Una consecuencia muy importante de (2.1.19) es la subaditividad fuerte de la entropía de von Neumann (SSA por sus siglas en inglés, de strong subadditivity). Esta puede enunciarse así. Dado un estado ρ_{123} en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, y ρ_{12} , ρ_2 y ρ_{23} sus reducciones a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, \mathcal{H}_2 y $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ respectivamente, se tiene que

$$S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) \geq S(\rho_{123}) + S(\rho_2) . \quad (2.1.20)$$

La SSA no es susceptible de una fácil interpretación, aunque podemos ver que se sigue directamente de (2.1.20), que sí tiene la interpretación de la disminución de la distinguibilidad. Si en (2.1.20) tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, $\mathcal{B} = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, $\rho_A = \rho_{123}$ y $\sigma_A = \rho_{12} \otimes 1_3$, obtenemos (2.1.20). Es útil rescribir (2.1.20) renombrando las álgebras. Tomamos A como el álgebra de los operadores que actúan en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ y B el álgebra de los operadores que actúan en $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$. De esta forma $A \cap B$ es el álgebra de los operadores que actúan en \mathcal{H}_2 y $A \cup B$ la correspondiente a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$:

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B) + S(A \cap B) , \quad (2.1.21)$$

¹Positivos incluso ante cualquier extensión a un sistema auxiliar arbitrario.

donde se sobreentiende que vale para cualquier estado ρ .

2.1.3. Información Mutua

Otra cantidad directamente relacionada con la entropía y de gran aplicación actual en QFT y holografía es la información mutua $I(A, B)$. Esta se define dado un estado y dos álgebras (disjuntas) como

$$I(A, B)_\rho = S(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) , \quad (2.1.22)$$

con ρ_{AB} un estado del álgebra $A \cup B$. La monotonidad de la entropía relativa implica la siguiente monotonidad para la información mutua

$$I(A, B \cup C) \geq I(A, B) . \quad (2.1.23)$$

La información mutua crece ante agregar un nuevo sistema C . Para hacernos una idea del rol de esta cantidad, es útil notar la siguiente desigualdad [21]

$$I(A, B)_\rho \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B \rangle_\rho - \langle \mathcal{O}_A \rangle_\rho \langle \mathcal{O}_B \rangle_\rho}{\|\mathcal{O}_A\|_\infty \|\mathcal{O}_B\|_\infty} \right)^2 . \quad (2.1.24)$$

Esta nos dice que la información mutua mide todas las correlaciones posibles entre los subsistemas A y B que tiene un estado ρ , pues acota todos los correladores conectados que dan cuenta de estas correlaciones, sean cuánticas o clásicas. A partir de (2.1.24) se intuye que si agrandamos el sistema B a $B \cup C$, la posibilidad de las correlaciones con el subsistema A aumenta, que es el contenido de (2.1.23). Para las aplicaciones en QFT, la desigualdad (2.1.24) nos da una idea de cómo están relacionadas las cantidades de la información cuántica, de aplicación reciente en QFT, con cantidades tradicionales en QFT como las funciones de correlación.

2.1.4. Hamiltonianos modulares

Una forma natural de describir a la matriz densidad de un estado global reducido a una subálgebra V es a través de su Hamiltoniano modular $H_V = -\log \rho_V$. En términos del Hamiltoniano modular, la matriz densidad tiene la forma “térmica”

$$\rho_V = \frac{e^{-H_V}}{\text{Tr}(e^{-H_V})} . \quad (2.1.25)$$

Los Hamiltonianos modulares son objetos muy interesantes que codifican todas las propiedades de un estado reducido. En la literatura matemática los Hamiltonianos modulares se han estudiado desde los años setenta. Ellos juegan un papel estructural

en la formulación algebraica de QFT [59, 60]. De la definición se sigue que un autovalor cero en la matriz densidad ρ_V implica un autovalor infinito en H_V . Como una aplicación muy simple, reescribamos con su ayuda la entropía relativa como

$$S(\rho||\sigma) = -\Delta S + \Delta\langle H_\sigma \rangle. \quad (2.1.26)$$

con $H_\sigma = -\log \sigma$ el Hamiltoniano modular del estado σ ,

$$\Delta S = S(\rho) - S(\sigma), \quad (2.1.27)$$

es la diferencia entre la entropías de entrelazado de los estados y

$$\Delta\langle H_\sigma \rangle = \langle H_\sigma \rangle_\rho - \langle H_\sigma \rangle_\sigma, \quad (2.1.28)$$

es la diferencia entre las energías modulares de los estados.

La descomposición (2.1.26) nos dice que la entropía relativa es la diferencia de la energía libre de los estados ρ y σ respecto del Hamiltoniano (modular de σ) a temperatura igual a uno. Esta separación de la entropía relativa en una parte de entropía y una parte de energía modular resulta muy útil para abordar ciertos problemas. En particular, para un estado ρ_λ que es una pequeña desviación de σ , gobernada por un parámetro λ , ($\rho_{\lambda=0} = \sigma$), por la positividad de la entropía relativa para todo valor de λ tendremos que la derivada de esta en $\lambda = 0$ es cero, por lo que la entropía relativa a primer orden en λ es cero. Esto implica que el Hamiltoniano modular $H = -\log \sigma$ nos da una forma de calcular la variación en la entropía de entrelazado a primer orden en λ :

$$\delta S = S(\rho) - S(\sigma) = \langle H_\sigma \rangle_\rho - \langle H_\sigma \rangle_\sigma = \delta\langle H_\sigma \rangle. \quad (2.1.29)$$

Esta inocente fórmula, llamada Primera Ley de la entropía de entrelazado, en analogía con la Primera Ley de la Termodinámica² ha sido uno de los motivos principales del interés reciente sobre los Hamiltonianos modulares, y de ella se han derivado aplicaciones sorprendentes en QFT y holografía, como la implicación de las ecuaciones de Einstein linealizadas alrededor de la solución de AdS a partir de la fórmula holográfica para la EE de Ryu-Takayanagi, que veremos más adelante, o la misma obtención de la fórmula holográfica en un caso particular [35, 49, 61]. Entre las aplicaciones de la entropía relativa y los Hamiltonianos modulares en QFT podemos mencionar la prueba de la cota de Bekenstein [34, 35], la condición promediada de energía nula (ANEC, por sus siglas en inglés) [37, 62], y varios resultados sobre la irreversibilidad del grupo de renormalización que presentaremos en esta Tesis [31, 32]. Para más detalles y

²En cierta parte de la literatura suele llamarse Primera Ley a la conservación de la energía con la parte de la variación del calor $\delta Q = TdS$ sustituida. Esta última igualdad es considerada en otros contextos como parte de la Segunda Ley (la parte que se aplica a los procesos reversibles).

aplicaciones de los Hamiltonianos modulares, véase por ejemplo [16, 63–70].

2.1.5. Estados Markovianos

Resulta muy interesante preguntarse por la estructura de los estados que saturan la SSA (2.1.20). Veamos clásicamente la siguiente situación. Una distribución de probabilidad clásica sobre tres variables aleatorias $p(x, y, z)$ se dice que es Markoviana si cumple que

$$p(x|y, z) = p(x|y) , \quad (2.1.30)$$

donde las probabilidades condicionales $p(x|y, z)$ se definen de la forma usual a partir de las distribuciones marginales de $p(x, y, z)$:

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} , \text{ con } p(x, y) = \int_z p(x, y, z) , \quad p(y) = \int_x \int_z p(x, y, z) , \quad (2.1.31)$$

y de forma análoga para $p(x|y, z)$. La conocida condición de Markovianidad clásica (2.1.30), se interpreta, cuando se piensan las variables aleatorias (x, y, z) como representando a una misma variable en distintos instantes de tiempo, como una evolución sin memoria: el futuro x solo depende del presente y y no del pasado z . Matemáticamente, la condición de Markovianidad implica que la distribución total puede ser obtenida a partir de sus distribuciones marginales,

$$p(x, y, z) = \frac{p(x, y)p(y, z)}{p(y)} . \quad (2.1.32)$$

Si tomamos logaritmos obtenemos la siguiente igualdad,

$$-\log p(x, y) - \log p(y, z) = -\log p(x, y, z) - \log p(y) , \quad (2.1.33)$$

y si tomamos valores de espectación en $p(x, y, z)$, obtendremos la saturación de la SSA de la entropía clásica de Shannon

$$S(p(x, y)) + S(p(y, z)) = S(p(x, y, z)) + S(p(y)) . \quad (2.1.34)$$

Clásicamente, los estados que saturan la SSA son los estados Markovianos. En el caso cuántico no tenemos análogo de la condición (2.1.30), pero sí tenemos análogos de las condiciones (2.1.33) y (2.1.34). Estas son (respectivamente) la condición

$$H_{\rho_{12}} + H_{\rho_{23}} = H_{\rho_{123}} + H_{\rho_2} , \quad (2.1.35)$$

sobre los Hamiltonianos modulares, y la condición de saturación de la SSA para la entropía de entrelazado

$$S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) = S(\rho_{123}) + S(\rho_2) . \quad (2.1.36)$$

En el caso cuántico, un estado se dice Markoviano si cumple alguna de estas dos condiciones de arriba. De hecho, veremos que la igualdad operatorial (2.1.35) es equivalente a la igualdad numérica (2.1.36). La condición de saturación de la SSA (2.1.36) es lo suficientemente fuerte para fijar gran parte de la estructura de entrelazado del estado ρ , Markoviano. El teorema de [71] nos dice que existe una descomposición ortogonal del espacio de Hilbert \mathcal{H}_2 ,

$$\mathcal{H}_2 = \oplus_k \mathcal{H}_L^k \otimes \mathcal{H}_R^k , \quad (2.1.37)$$

de forma que un estado es Markoviano (cumple con (2.1.36)) si y solo si

$$\rho_{123} = \sum_k p_k \rho_{1L}^k \otimes \rho_{R3}^k , \quad (2.1.38)$$

donde los p_k son probabilidades, ρ_{1L}^k es el estado reducido a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_L^k$ y ρ_{R3}^k es el estado reducido a $\mathcal{H}_R^k \otimes \mathcal{H}_3$. O sea, ρ_{123} es una combinación convexa de estados tipo productos con soporte disjunto. El contenido del teorema es que los estados sean necesariamente de la forma (2.1.38), pues la suficiencia, (2.1.38) \Rightarrow (2.1.36), se sigue fácilmente con la ayuda de (2.1.12).

Notemos que si tomamos traza en el estado Markoviano (2.1.38) por el subsistema 2, nos queda

$$\rho_{13} \equiv \text{Tr}_2 \left(\sum_k p_k \rho_{1L}^k \otimes \rho_{R3}^k \right) = \sum_k p_k \rho_1^k \otimes \rho_3^k , \quad (2.1.39)$$

que es un estado separable (2.1.8) entre los subsistemas 1 y 3. Esto significa que en los estados Markovianos las correlaciones entre los subsistemas 1 y 3 son puramente clásicas.

Una imagen que representa la estructura de entrelazado de un estado Markoviano es la de una cadena: las correlaciones entre los eslabones que son segundos vecinos están dadas exclusivamente por las correlaciones entre primeros vecinos (en este caso los eslabones son los subsistemas 1, 2, 3), y si cortamos por el eslabón intermedio, (lo que equivale a trazar por el subsistema 2), la cadena se rompe (el estado resultante es separable y solo quedan las correlaciones clásicas, si es que hay más de un término en la suma por k en (2.1.38)). En este sentido, un estado Markoviano es algo muy cercano a un estado producto $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3$ (que es un caso particular de estado Markoviano).

Otra consecuencia relevante que se deriva de (2.1.35, 2.1.36) es que un estado Markoviano puede reconstruirse completamente a partir del conocimiento de sus estados

reducidos ρ_{12} y ρ_{23} , lo cual es un hecho nada trivial en mecánica cuántica, en donde el conocimiento de las partes no implica el conocimiento del estado global. Esta propiedad es análoga a lo que pasa en el caso clásico. De (2.1.35) tenemos que

$$\rho_{123} = \exp(\log \rho_{12} + \log \rho_{23} - \log \rho_2) . \quad (2.1.40)$$

De forma sorprendente, también vale para los estados Markovianos que

$$\rho_{123}^{-1/2} = \rho_{23}^{1/2} \rho_{12}^{-1/2} \rho_2^{1/2} , \quad (2.1.41)$$

y que [58]

$$\rho_{12}^{-it} \rho_2^{it} = \rho_{123}^{-it} \rho_{23}^{it} , \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (2.1.42)$$

Para su posterior utilidad en el Capítulo 5, veamos la equivalencia entre (2.1.35) y (2.1.36) (y de paso una demostración de la SSA misma) basada en una interesante desigualdad conocida como desigualdad de Golden-Thomson-Lieb [72]. La igualdad (2.1.36) se sigue de (2.1.35) simplemente tomando valor de espactación en el estado. Para mostrar la implicación en la otra dirección consideremos la matriz [58]

$$\exp(\log \rho_{12} - \log \rho_2 + \log \rho_{23}) = \lambda \omega . \quad (2.1.43)$$

Este es un operador positivo que podemos escribir como una matriz densidad (normalizada) ω y un número real $\lambda > 0$. De la definición de la entropía relativa podemos verificar que

$$S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) - S(\rho_2) - S(\rho_{123}) = S(\rho_{123} || \omega) - \log \lambda . \quad (2.1.44)$$

Usamos la desigualdad de Golden-Thomson-Lieb [72], válida para cualquier trio de operadores Hemíticos X, Y, Z ,

$$\text{Tr} \exp(X + Y + Z) \leq \int_0^\infty dt \text{Tr} \left((t + e^{-X})^{-1} e^Y (t + e^{-X})^{-1} e^Z \right) . \quad (2.1.45)$$

Elegimos $X = -\log \rho_2$, $Y = \log \rho_{12}$, $Z = \log \rho_{23}$, con lo cual

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \int_0^\infty dt \text{Tr} \left((t + \rho_2)^{-1} \rho_{12} (t + \rho_2)^{-1} \rho_{23} \right) \\ &= \int_0^\infty dt \text{Tr} \left((t + \rho_2)^{-1} \rho_2 (t + \rho_2)^{-1} \rho_2 \right) = \text{Tr} \rho_2 = 1 . \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

En el primer paso hemos tomado la traza por 1 y 3, dado que ρ_{12} está evaluando un operador en 23, y ρ_{23} está evaluando un operador en 12. En el segundo paso hemos hecho la integral explícitamente.

Tenemos entonces que $\log(\lambda) \leq 0$. De (2.1.44) obtenemos la SSA en el miembro izquierdo a partir de la positividad de la entropía relativa en el miembro derecho. Para que el miembro izquierdo en (2.1.44) se anule, necesitamos que $\lambda = 1$ y que $S(\rho_{123}||\omega) = 0$, dado que la entropía relativa y $-\log(\lambda)$ son positivos. En este caso se tendría que las matrices densidades ρ_{123} y ω son iguales (la entropía relativa es cero cuando los estados son iguales), y

$$\rho_{123} = \exp(\log \rho_{12} + \log \rho_{23} - \log \rho_2), \quad (2.1.47)$$

que es equivalente a (2.1.35), o a (2.1.40).

Para su aplicación a QFT, en la que necesitamos cantidades que estén bien definidas, o mejor definidas que la entropía de entrelazado en el límite del continuo, como la diferencia de las entropías de entrelazado o la entropía relativa, notemos dos consecuencias muy simples de tener un estado Markoviano. Sea $\Delta S = S(\rho_1) - S(\rho_0)$ la diferencia de EE entre un estado genérico ρ_1 y un estado Markoviano ρ_0 . Como ρ_0 satura la SSA, es inmediato que

$$\Delta S(A) + \Delta S(B) - \Delta S(A \cap B) - \Delta S(A \cup B) \geq 0. \quad (2.1.48)$$

Como tenemos la igualdad (2.1.35) para el estado ρ_0 , tenemos que

$$\Delta H_A + \Delta H_B - \Delta H_{A \cap B} - \Delta H_{A \cup B} = 0. \quad (2.1.49)$$

De escribir la entropía relativa como $S(\rho_1||\rho_0) = -\Delta S + \Delta \langle H \rangle$, (2.1.26), obtenemos

$$S(\rho_1^A||\rho_0^A) + S(\rho_1^B||\rho_0^B) - S(\rho_1^{A \cap B}||\rho_0^{A \cap B}) - S(\rho_1^{A \cup B}||\rho_0^{A \cup B}) \leq 0. \quad (2.1.50)$$

Esta es la superaditividad fuerte de la entropía relativa, una desigualdad que en general no es cierta, pero que vale cuando el segundo estado en la entropía relativa es un Markoviano. Algunas condiciones suficientes para su validez fueron estudiadas en [58] en un contexto más general, exigiéndose condiciones muy restrictivas sobre el estado ρ_0 . En el caso de álgebras factores en un espacio de Hilbert, esas condiciones se reducen a pedir que ρ_0 sea del tipo $\rho_0 = \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3$, [58], pero como vimos, también vale para ρ_0 Markoviano. En el Capítulo 5 demostraremos que el vacío de cualquier teoría de campos es Markoviano respecto de ciertas álgebras, y valen (2.1.48), (2.1.49) y (2.1.50). Estas propiedades son la clave para una demostración entrópica del Teorema A, que presentaremos en el Capítulo 7.

2.2. Información Cuántica en Teoría de Campos

La aplicación de las herramientas de la Información Cuántica a la Teoría de Campos ha sido un tema de interés creciente en los últimos años. Sin embargo, al tener que tratar con espacios de Hilbert y álgebras de dimensión infinita, muchas cantidades, comenzando por la entropía de entrelazado y los Hamiltonianos modulares, pueden presentar problemas y ambigüedades matemáticas. Ejemplo de esto es que la entropía de entrelazado es UV divergente en QFT. El gran poder de la simetría de Lorentz y, curiosamente, estas mismas divergencias UV, transforman problemas muy interesantes, y a primera vista muy complicados, en problemas geométricos relativamente más simples. Estas herramientas han permitido un fructífero y no convencional enfoque para estudiar y conocer mejor la estructura de las teorías de campos. En esta sección presentaremos de forma breve algunos teoremas y resultados sobre algunos elementos de lo que pudieramos llamar Información Cuántica en QFT, que son usados, o pueden resultar útiles para la lectura de esta Tesis.

La Teoría de Campos³ en el enfoque axiomático de Wightman [73], tiene entre sus ingredientes a los operadores de campos $\phi(x)$, que son distribuciones localizadas en los puntos $x = (x^0, x^1, \dots, x^{d-1})$ del espacio de Minkowski M_d de dimensión d (siendo x^0 el tiempo), y que transforman covariantemente ante el grupo de Lorentz. A partir de estas distribuciones $\phi(x)$ se obtienen los operadores ϕ_f que actúan sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados de la teoría, suavizando estas distribuciones con una función de prueba $f(x)$

$$\phi_f = \int \phi(x) f(x) . \quad (2.2.1)$$

Los operadores de campos $\phi(x)$ son distribuciones con imagen en el espacio de operadores de \mathcal{H} (operator-valued-distributions). Se dice que el operador ϕ_f de \mathcal{H} está localizado en la región \mathcal{O} , abierto del espacio de Minkowski, si la función de prueba $f(x)$ tiene soporte en \mathcal{O} . En general para que ϕ_f sea propiamente un operador que actúa en el espacio de Hilbert de estados de la teoría, el soporte de $f(x)$ tiene que estar en un abierto de M_d , y no en un abierto de una superficie de dimensión menor. Si esto no se satisface, podría pasar que ϕ_f actuando sobre los estados de \mathcal{H} nos de un estado de norma o energía infinita. Distinguimos entre los operadores de campos $\phi(x)$, que son distribuciones, y los operadores ϕ_f , que son los que actúan en el espacio de Hilbert de la teoría, y se obtienen de los operadores de campo según (2.2.1), con f con soporte en un abierto de M_d .

Los estados suelen pensarse en el cuadro de Heisenberg, y la evolución es sobre los

³En esta Tesis cuando nos referimos a una Teoría de Campos, nos referimos a una Teoría de Campos relativista, con invariancia de Lorentz.

operadores de campos

$$\phi(x^0 + t, x^i) = e^{iHt} \phi(x) e^{-iHt} , \quad (2.2.2)$$

con H el Hamiltoniano de la teoría $H = \int d^{d-1}x T_{00}(x^0, x^i)$, y T_{00} la componente 00 del tensor de energía-momentos $T_{\mu\nu}$ de la teoría.

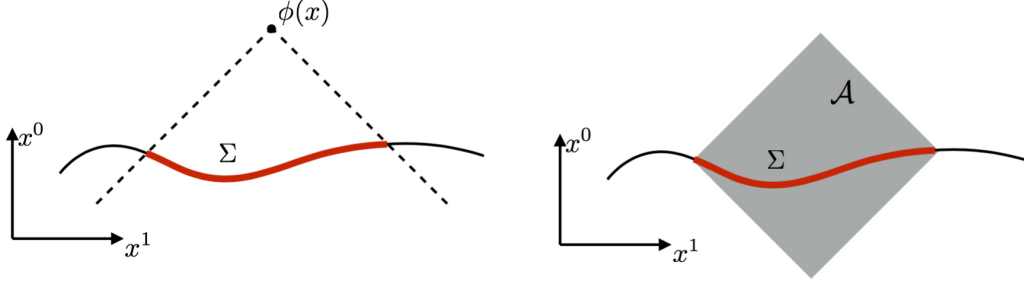


Figura 2.1: Evolución causal en espacio de Minkowski. Izquierda: El operador de campo local $\phi(x)$ es cierta combinación de los operadores de campos contenidos en la porción Σ de una superficie de Cauchy. Derecha: Los operadores de campos en la porción Σ de la superficie de Cauchy determinan todos los operadores de campos locales en el completamiento causal de Σ .

Como la evolución es unitaria y causal, para determinar $\phi(x^0 + t, x^i)$ nos basta conocer los operadores de campos $\phi(x)$ solo en la porción Σ de una superficie de Cauchy que está dentro del cono de luz pasado de $\phi(x^0 + t, x^i)$, ver Figura 2.1. De la misma forma, si conozco el álgebra de todos los operadores de campos en una porción Σ de una superficie de Cauchy, conozco el álgebra de todos los operadores de campos en el completamiento causal de esta, que son todos los puntos de M_d cuyos conos de luz pasado o futuro intersectan totalmente a Σ .

Solo al nivel de la estructura causal del espacio de Minkowski M_d puedo hacer la siguiente construcción. Para cada abierto $\mathcal{O} \subset M_d$ defino su conmutante \mathcal{O}' como el subconjunto de puntos de M_d que están a distancia espacial con los de \mathcal{O} .

$$\mathcal{O}' = \{x \in M_d \mid x \text{ espacial con } y \ \forall y \in \mathcal{O}\} . \quad (2.2.3)$$

A partir de aquí defino a las regiones causalmente completas de M_d como aquellas que coinciden con su doble conmutante. Como muestra la Figura 2.2, a cada abierto \mathcal{O} de M_d le puedo tomar su completamiento causal \mathcal{O}'' , definido como el doble conmutante de \mathcal{O} . Esta construcción es más sutil que la de la superficie de Cauchy, pues \mathcal{O}'' puede contener puntos espacialmente separados con algunos puntos de \mathcal{O} , ver Figura 2.2.

La forma que tienen los conjuntos causalmente completos en dimensión $d = 2$ es la de diamantes, y en dimensión mayor pueden ser subconjuntos complicados con cáusticas. El conjunto de regiones de M_d causalmente completas tiene una estructura matemática conocida como de lattice ortocomplementada, y que, curiosamente, coin-

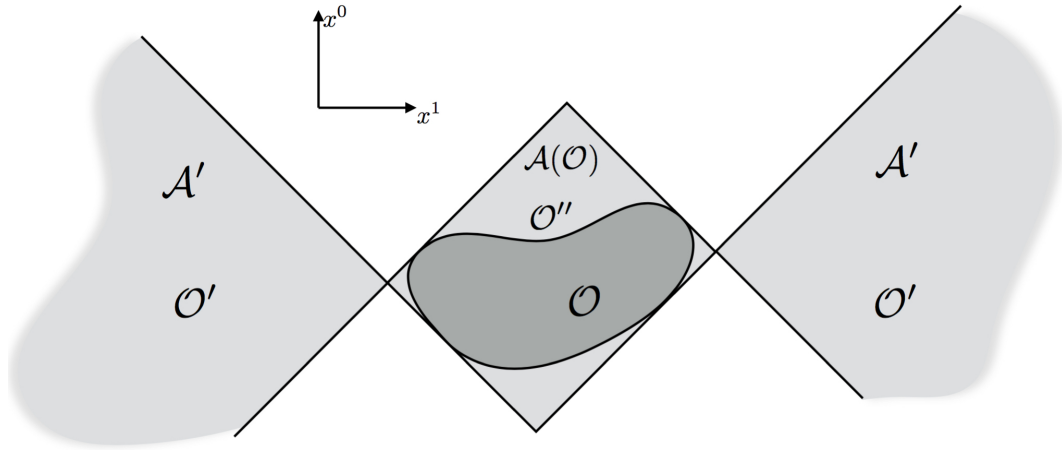


Figura 2.2: Espacio de Minkowski M_d . A cada abierto \mathcal{O} le corresponde su completamiento causal, dado por el doble conmutante \mathcal{O}'' de \mathcal{O} . El conmutante \mathcal{O}' de \mathcal{O} es siempre causalmente completo. El álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ es el álgebra de todos los operadores localizados en \mathcal{O}'' . El conmutante de la subálgebra \mathcal{A} asociada a la región \mathcal{O} es el álgebra \mathcal{A}' asociada a la región conmutante \mathcal{O}' .

cide con la estructura que tienen los proyectores en un espacio de Hilbert [74]⁴. Una lattice ortocomplementada es un conjunto en donde está definido un orden parcial \subseteq , una intersección \wedge , una unión \vee y una conjugación $'$. En el caso de los proyectores en un espacio de Hilbert, el orden parcial es el orden parcial \geq de los proyectores (para dos proyectores p y q , $p \geq q$ si $pq = q$), la conjugación de p es la proyección en el espacio ortogonal a p , $p' = p_{\perp}$, la intersección es la composición, y la unión $p \vee q$ la proyección al subespacio lineal generado por los subespacios de p y q , que coincide con $(p \cup q)''$, el doble conjugado de la unión como conjunto.

De forma similar, en los subconjuntos causalmente completos de M_d , el orden parcial y la intersección es como la de conjunto, la conjugación es la definida por la operación conmutante (2.2.3), y la unión es el doble conmutante de la unión como conjunto.

Una estructura similar tienen las llamadas álgebras de von Neumann.

Definición: Sea \mathcal{A} una subálgebra de operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Se define su conmutante \mathcal{A}' como el conjunto de operadores de \mathcal{H} que conmutan con los operadores de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid AB = BA \quad \forall A \in \mathcal{A}\}. \quad (2.2.4)$$

Puede comprobarse que \mathcal{A}' es una subálgebra.

Definición: Se dice que una subálgebra \mathcal{A} es de von Neumann si es una subálgebra de operadores sobre un espacio de Hilbert y su doble conmutante coincide con ella:

⁴Existen otras estructuras relacionadas, como la lattice modular, o la lattice ortomodular, en dependencia de la relación distributiva que tengan \wedge y \vee .

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'' \equiv (\mathcal{A}')'.$$

El conjunto de subálgebras de von Neumann en un espacio de Hilbert tiene estructura de lattice ortocomplementada, con la intersección y el orden parcial como conjunto, la conjugación como el conmutante, y la unión como el doble conmutante de la unión como conjunto.

El enfoque algebraico a QFT de Haag-Kastler [59] comienza con la idea de asociar álgebras \mathcal{A} a abiertos \mathcal{O} de M_d . Estas álgebras abstractas se pueden representar como el álgebra de von Neumann generada por los operadores locales que se obtienen de suavizar los operadores de campos con funciones de prueba con soporte dentro de la región \mathcal{O} . $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ es el álgebra de todos los operadores obtenidos de suavizar los operadores de campos con funciones f con soporte en el completamiento causal de \mathcal{O} . El conjunto de los subconjuntos causalmente completos en Minkowski, y el conjunto de las subálgebras de von Neumann en un espacio de Hilbert, comparten la estructura de lattice ortocomplementada. Para asociar subálgebras con regiones debe suceder que la estructura conmutativa de estas álgebras sea compatible con la estructura causal del espacio-tiempo M_d , dado que en QFT, el requisito básico de la localidad, se expresa por la conmutación de los operadores de campo locales que se encuentran a distancia espacial. El axioma que intenta refinar esta idea de la conmutatividad de los operadores a distancia espacial es el de la dualidad de Haag: el conmutante del álgebra asociada a una región, es el álgebra asociada a la región conmutante⁵,

$$\mathcal{A}'(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}') . \quad (2.2.5)$$

Nos será conveniente pensar en términos del álgebra asociada a una región de M_d , que es el álgebra de von Neumann de los operadores obtenidos de suavizar a los operadores de campo con funciones de prueba con soporte en el completamiento causal de la región.

2.2.1. Teorema de Reeh-Schlieder

El Teorema de Reeh-Schlieder es un resultado que usamos como requisito para los teoremas de semi-inclusión modular que veremos en el Capítulo 5, e implica que el vacío de una teoría de campos arbitraria es siempre un estado entrelazado respecto de subsistemas definidos por regiones en el espacio. Este puede resultar contraintuitivo, por lo que conviene analizar primero un caso similar en dimensión finita. Veamos el

⁵La dualidad de Haag puede fallar cuando las subálgebras tienen centro, elementos distintos a la identidad y que conmutan con \mathcal{A} y \mathcal{A}' . Esto sucede en las teorías de gauge, aunque siempre existe una correspondencia subálgebras - regiones en donde este centro puede evitarse, véase [75]. En el caso de la gravedad, esto no está entendido del todo.

siguiente ejemplo.

Sea $|h\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, con $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B)$, tal que su matriz densidad reducida a \mathcal{H}_A tenga todos sus autovalores $\lambda_i \neq 0$. Por la descomposición de Schmidt tenemos que

$$|h\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle, \quad (2.2.6)$$

para ciertas bases $\{a_i\}$ de \mathcal{H}_A y $\{b_j\}$ de \mathcal{H}_B . Sea $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores en \mathcal{H} y \mathcal{A} la subálgebra de la forma $\mathcal{O}_A \otimes 1_B$, con $\mathcal{O}_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$. Es fácil ver entonces que actuando solo con los elementos de \mathcal{A} sobre $|h\rangle$ puedo generar todos los estados en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . O sea,

$$\forall |f\rangle \in \mathcal{H} \quad \exists \mathcal{O}_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \quad |f\rangle = \mathcal{O}_A \otimes 1_B |h\rangle. \quad (2.2.7)$$

Esto es posible porque el estado $|h\rangle$ está muy entrelazado, dado que todos los coeficientes de Schmidt en la descomposición (2.2.6) son distintos de cero. Notemos primero que las dimensiones concuerdan. Si $n = \dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B)$, entonces $\dim(\mathcal{H}) = n^2$ y cualquier $|f\rangle$ de \mathcal{H} tiene n^2 componentes, que es la cantidad de componentes que tiene el elemento de matrix de un operador $\mathcal{O}_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$. Específicamente, tomando como base de \mathcal{H} la base $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$ de la descomposición de Schmidt de $|h\rangle$

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_A \otimes 1_B) |h\rangle &= \left(\sum_{jk} O_{jk} |a_j\rangle \langle a_k| \otimes 1_B \right) \sum_i \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle \\ &= \sum_{jk} O_{jk} \sqrt{\lambda_k} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle = |f\rangle, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

si elegimos $O_{jk} \sqrt{\lambda_k}$ como las componentes de $|f\rangle$. Notemos que si el estado es separable, $\lambda_1 = 1$ y todos los demás autovalores iguales a cero, con la operación anterior solo puedo producir estados separables de la forma $\sum_j O_{j1} |a_j\rangle \otimes |b_1\rangle$, que son todos los estados de \mathcal{H}_A por $|b_1\rangle$. En un contexto más general, un vector como $|h\rangle$ se dice cíclico respecto de una subálgebra de von Neumann \mathcal{A} .

Definición: Sea \mathcal{A} un álgebra de von Neumann en \mathcal{H} . Se dice que $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$ es cíclico para \mathcal{A} si el conjunto $\{A|\Omega\rangle \mid A \in \mathcal{A}\}$ es denso en \mathcal{H} .

Definición: Decimos que $|\Omega\rangle$ es separador en \mathcal{A} si $\forall A \in \mathcal{A} \quad A|\Omega\rangle = 0 \Rightarrow A = 0$.

Proposición: Sea \mathcal{A} de von Neumann sobre \mathcal{H} y $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$. $|\Omega\rangle$ es cíclico en \mathcal{H} si y solo si es separador para \mathcal{A}' .

Teorema de Reeh-Schlieder : El vacío $|0\rangle$ de una QFT es cíclico y separador

respecto del álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ de operadores de una región \mathcal{O} abierta y acotada en el espacio de Minkowski. O sea, $\mathcal{A}(\mathcal{O})|0\rangle$ es denso en el espacio de Hilbert de la teoría y $|0\rangle$ no puede ser aniquilado por un operador localizado en \mathcal{O} [76–79].

Solo actuando sobre el vacío con operadores localizados en una pequeña región puedo generar o aproximarme a cualquier estado, en particular, actuando con operadores dentro una habitación, pudiera producir un estado que corresponde a un cuerpo celeste lejano. La realización de esta posibilidad tiene en contra que las acciones que tendría que llevar a cabo dentro de la habitación demandarían una cantidad creciente de energía, y la probabilidad de éxito es infinitamente pequeña. Además de eso, notemos dos cosas interesantes y que contrastan con el caso finito. En el caso finito, para que coincidieran las dimensiones, los espacios de Hilbert factores tenían que tener la misma dimensión. Por ejemplo, en una cadena de N espines descrita por el espacio de Hilbert \mathcal{H} , con los operadores del espacio de Hilbert asociado a un solo espin no puedo generarme todos los estados de \mathcal{H} actuando sobre un mismo y fijo estado (de \mathcal{H}), pero si puedo lograrlo con los operadores de $N/2$ espines. Esto contrasta con este teorema, en donde no importa el tamaño del abierto \mathcal{O} , que puede ser tan pequeño como quiera. Esto es resultado de que en teoría de campos, el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ asociada a cualquier abierto \mathcal{O} del espacio de Minkowski M_d , es infinita, y tiene el mismo número de elementos que el álgebra asociada a la región complementaria $\mathcal{A}(\mathcal{O}')$.

Una de las consecuencias de este teorema, es que “los coeficientes de Schmidt” del vacío entre cualesquiera partición del espacio de Hilbert asociada a una partición del espacio son todos distintos de cero, lo que implica que el vacío siempre está entrelazado respecto de cualesquiera pedazos del espacio. El teorema vale también para cualquier estado de energía finita, no solo para el vacío.

Parte del contenido y de los resultados que se exponen en esta Tesis es la demostración de que el vacío es un estado Markoviano respecto de ciertas regiones, y como vimos en (2.1.5), un estado Markoviano es muy cercano a un estado producto. En el caso del campo escalar libre, podemos decir más, dado que en esta teoría es posible localizar los operadores en una superficie nula, como el plano nulo, y resulta que el vacío es de hecho un estado producto en la dirección perpendicular [80]. En esta teoría, es suficiente, para producir operadores en el espacio de Hilbert a partir de los operadores de campo, que la función de prueba tenga soporte solo en una superficie nula. Esto implica que si actúo con un operador localizado en el plano nulo no puedo generar casi ningún estado del espacio del Hilbert, en aparente contradicción con el teorema. El teorema insiste, sabiamente, en que sea el álgebra asociada a un abierto de Minkowski, y no un abierto de una superficie dimensión menor. Es curioso cómo resulta relevante exigir que el operador tenga soporte no solo en el espacio, sino también en el tiempo (aún cuando no se necesita para obtener un operador a partir de un operador

de campo, como en el caso del campo escalar libre y el plano nulo), para implicar algo sobre la estructura de entrelazado del vacío. Si en el campo libre extendiendo ligeramente el soporte de los operadores, de estar en una región del plano nulo, a estar en una región espacio-temporal alrededor del plano nulo, paso de no poder generar casi ningún estado a partir del vacío, a poder generar todos los estados. La importancia del soporte en el tiempo es algo que puede resultar poco familiar y extraño, pero es clave en este resultado, y entra de forma sutil en otros análisis que involucran cantidades de la Teoría de la Información en QFT, como veremos en la Sección (5.3).

2.2.2. Teorema de Bisognano-Wichmann

Un resultado muy importante y estrechamente relacionado con el teorema de CPT⁶ es el hecho de que el Hamiltoniano modular del vacío reducido a la mitad del espacio (cuyo completamiento causal en el espacio de Minkowski es la región $x^1 \geq |x^0|$, conocida como Rindler wedge o cuña de Rindler) viene dado por

$$H = 2\pi K_1, \quad (2.2.9)$$

donde

$$K_1 = \int d^{d-1}x \, x^1 T_{00}(x^0 = 0, x) \quad (2.2.10)$$

es el operador generador de boosts del grupo de Lorentz en la dirección x^1 [81]. El resultado (2.2.9) se conoce como Teorema de Bisognano-Wichmann y es un resultado central que conecta los conceptos de la teoría de la información con la estructura relativista de la teoría de campos, y del cual se siguen muchas consecuencias y aplicaciones, como veremos a lo largo de esta Tesis.

Es sorprendente, desde el punto de vista de la Teoría de la Información, cómo un objeto matemático tan complejo como H , dado por el logaritmo de la matriz reducida del vacío de cualquier QFT, venga expresado en términos de una integral simple de su tensor de energía-momentos. Uno esperaría en cualquier caso que H fuese en QFT un operador completamente no local en la región⁷, como de hecho lo es, fuera de este y otros casos puntuales. En el caso de teorías conformes (CFT) tenemos un resultado similar para el vacío reducido a esferas, dado que esta está conformemente relacionada con el plano [49, 54], lo que se discutirá con cierto detalle en la Sección 2.2.7. La particularidad que hace especial a estas regiones es que existe una simetría espacio-temporal cuyo vector de Killing deja a estas invariantes.

Podemos tener una idea del por qué de este resultado con ayuda de la representación

⁶Simetría de toda teoría ante conjugación de carga e inversión espacial y temporal.

⁷Ver por ejemplo [82] para una discusión sobre términos locales en H para regiones arbitrarias en una QFT.

de la matriz densidad del vacío con la integral funcional. Veamos esto brevemente.

Tomemos el vacío $|0\rangle$ de una teoría de campos ϕ en la superficie espacial definida por tiempo igual a cero, y tomemos en dicha superficie una región V . Representemos primero el vacío como una integral funcional en tiempo Euclídeo. Sean $|\alpha\rangle$ los “autoestados”⁸ de $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)$: $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)|\alpha\rangle = \alpha(\vec{x})|\alpha\rangle$. La funcional de onda del vacío $|0\rangle$ se escribe como

$$\Phi(\alpha) \equiv \langle\alpha|0\rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, -\infty)=0}^{\phi(\vec{x}, 0)=\alpha(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}, \quad (2.2.11)$$

donde N es una constante de normalización y S_E la acción Euclídea. Este estado de vacío se selecciona de la expresión en espacio de Minkowski (t_M el tiempo en Minkowski, $\hbar = 1$)

$$\langle\varphi', t'_M|\varphi, t_M\rangle = \langle\varphi'|e^{-i\mathcal{H}(t'_M-t_M)}|\varphi\rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, t_M)=\varphi(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t'_M)=\varphi'(\vec{x})} D\phi e^{iS(\phi)}, \quad (2.2.12)$$

donde $|\varphi, t_M\rangle$ es el autoestado de $\hat{\phi}(\vec{x}, t_M)$ a tiempo t_M : $\hat{\phi}(\vec{x}, t_M)|\varphi, t_M\rangle = \varphi(\vec{x}, t_M)|\varphi, t_M\rangle$ y $|\varphi, t_M\rangle = e^{i\mathcal{H}t_M}|\varphi\rangle$. En (2.2.12) introducimos $1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$, con $|n\rangle$ los autoestados de \mathcal{H} con autovalores E_n . Pasamos toda la expresión a tiempo Euclídeo $t_M \rightarrow -it$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle\varphi'|n\rangle\langle n|\varphi\rangle e^{-(t'-t)E_n} = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, t)=\varphi(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t')=\varphi'(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}.$$

Al tomar el límite $t \rightarrow -\infty$, de la suma solo sobrevive el estado de mínima energía $n = 0$.

$$\langle\varphi'|0\rangle\langle 0|\varphi\rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, -\infty)=\varphi(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t')=\varphi'(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}.$$

Si tomamos el valor de contorno en la integral funcional $\varphi(\vec{x}) = 0$ en $t = -\infty$, absorbemos $\langle 0|\varphi\rangle$ en $N^{-1/2}$ y evaluamos $t' = 0$, en donde $\varphi'(\vec{x}) = \alpha(\vec{x})$, nos queda (2.2.11). La integral funcional en (2.2.11) sobre $\phi(\vec{x}, t)$ es entonces en todo el semiespacio inferior de tiempo Euclídeo t negativo. De forma similar

$$\Phi^*(\alpha') \equiv \langle 0|\alpha'\rangle = N^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, 0)=\alpha'(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, \infty)=0} D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (2.2.13)$$

De (2.2.11) y (2.2.13), tenemos la matriz densidad ρ del vacío en la base $|\alpha\rangle$

$$\rho(\alpha, \alpha') = \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha'\rangle = \Phi(\alpha)\Phi^*(\alpha') = N^{-1} \int_{\phi(\vec{x}, 0^+)=\alpha'(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, 0^-)=\alpha(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (2.2.14)$$

Para calcular la matriz densidad ρ_V del estado reducido a la región V , hacemos $\alpha =$

⁸Estos autoestados solo existirían en una regularización tipo latice del espacio de Hilbert, por lo que esta presentación es formal.

$\alpha_V + \beta$ y $\alpha' = \alpha'_V + \beta$, con β con soporte en \bar{V} (el complemento de V) y α_V, α'_V con soporte en V , e integramos por las $\beta(\vec{x}, 0)$ de \bar{V} .

$$\begin{aligned} \rho_V(\alpha_V, \alpha'_V) &= \text{Tr}_{\substack{\alpha \in \bar{V} \\ \alpha' \in \bar{V}}} \rho(\alpha, \alpha') = \int D\beta \Phi(\alpha_V + \beta) \Phi^*(\alpha'_V + \beta) \\ &= N^{-1} \int_{\phi(x>0,0^+)=\alpha'_V(\vec{x})}^{\phi(x>0,0^-)=\alpha_V(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)} . \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

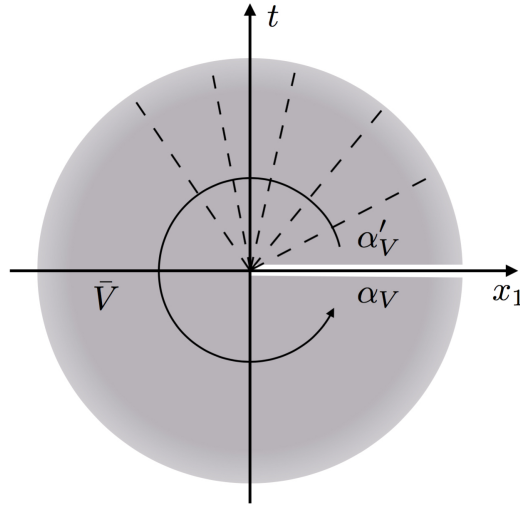


Figura 2.3: La integral funcional en tiempo Euclídeo que define a la matriz ρ_V del vacío reducido al semiespacio $x_1 > 0$ (región V) puede interpretarse como realizada angularmente. Podemos leer de aquí, en analogía con (2.2.12), que $\rho_V(\alpha, \alpha') = \langle \alpha | e^{-2\pi i K_1} | \alpha' \rangle$, donde K_1 es el generador de rotaciones.

En el caso en que V es el semiespacio $V = \{x; x^1 > 0\}$, el dominio de integración en espacio Euclídeo de esta integral funcional es como el indicado en la Figura 2.3. Sin embargo, por la simetría del problema, tenemos la libertad de interpretar esta integral funcional que nos da $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$, como el resultado de evolucionar el estado $|\alpha'_V(x), \theta = 0^+\rangle$ en el tiempo angular θ con la evolución $U_R(\theta) = e^{-i\theta K_1}$, hasta el estado $|\alpha_V(x), \theta = 2\pi\rangle$, donde K_1 es el generador de rotaciones en el espacio Euclídeo, que coincide en forma con el del espacio de Minkowski para las direcciones espaciales. O sea, $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$ es la amplitud de probabilidad entre $|\alpha'_V(x), \theta = 0^+\rangle$ y $|\alpha_V(x), \theta = 2\pi\rangle$

$$\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V) = \langle \alpha_V(x), 2\pi | \alpha'_V(x), 0^+ \rangle = \langle \alpha_V(x) | U_R(2\pi) | \alpha'_V(x) \rangle = \langle \alpha_V(x) | e^{-i2\pi K_1} | \alpha'_V(x) \rangle \quad (2.2.16)$$

El generador de las rotaciones en el plano de dos dimensiones de coordenadas μ y ν viene dado por

$$M_{\mu\nu} = \int d^{d-1}x (x_\nu T_{0\mu} - x_\mu T_{0\nu}) , \quad (2.2.17)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentos de la teoría. Nos interesan las rotaciones

en el plano Euclídeo de coordenadas $(x^0 = t, x^1)$, con lo cual

$$K_1 = M_{01} = \int d^{d-1}x (x_1 T_{00} - x_0 T_{01}) . \quad (2.2.18)$$

Si la integración la hacemos por la superficie de tiempo cero, tenemos que $x_0 = 0$ y

$$K_1 = M_{01} = \int d^{d-1}x x_1 T_{00} . \quad (2.2.19)$$

Ahora, en el plano (x, t) Euclídeo, $U_R(\theta) = e^{-i\theta K_1}$ implementa las rotaciones

$$R_\theta \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} . \quad (2.2.20)$$

Si pasamos al espacio de Minkowski $t \rightarrow it_M$, con t_M el tiempo de Minkowski, tenemos

$$R_\theta \begin{pmatrix} it_M \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} it_M \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(t_M \cos \theta + x(-i \sin \theta)) \\ t_M(-i \sin \theta) + x \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (2.2.21)$$

con lo cual vemos (quitando las “i” que multiplican toda la primera componente de los vectores), que R_θ actúa en el plano (x, t_M) de Minkowski como

$$R_\theta \begin{pmatrix} t_M \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_M \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(-i\theta) & \sinh(-i\theta) \\ \sinh(-i\theta) & \cosh(-i\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_M \\ x \end{pmatrix} . \quad (2.2.22)$$

R_θ en el plano (x^1, t_M) es un boost con parámetro imaginario $\eta = -i\theta$, dado que un boost actúa como

$$(\text{Boost})_s \begin{pmatrix} t_M \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_M \\ x \end{pmatrix} . \quad (2.2.23)$$

La rotación $U_R(\theta) = e^{-i\theta K_1}$ en el espacio Euclídeo es un boost en Minkowski de parámetro imaginario $s = -i\theta$:

$$U_R(\theta) = e^{-i\theta K_1} \text{ en Euclídeo } \longleftrightarrow U_{\text{boost}}(s = -i\theta) = e^{-i(-i\theta)K_1} = e^{-\theta K_1} \text{ en Minkowski} . \quad (2.2.24)$$

De (2.2.16) tenemos que, en el espacio Euclídeo

$$\langle \alpha_V | \rho_V | \alpha'_V \rangle = \langle \alpha_V | e^{-i2\pi K_1} | \alpha'_V \rangle , \quad (2.2.25)$$

de lo cual concluimos, por (2.2.24), que en el espacio de Minkowski

$$\rho_V = e^{-2\pi K_1} . \quad (2.2.26)$$

Este es el resultado que queríamos probar.

Como todo generador de simetría, K_1 en (2.2.10) es una carga conservada, y puede expresarse como la integral por cualquier superficie de Cauchy Σ dentro del mismo desarrollo causal de Rindler de la corriente conservada

$$J_{1\mu}(s) = \xi_1^\nu T_{\mu\nu}(s) , \quad (2.2.27)$$

con lo cual

$$K_1 = \int_{\Sigma} d^{d-1}s \, \eta^\mu J_{1\mu}(s) , \quad (2.2.28)$$

donde s son $d - 1$ coordenadas sobre Σ y η^μ es el vector ortonormal a Σ . El campo vectorial $\xi^\mu = 2\pi(x^1, x^0, 0, \dots, 0)$ es el generador de las órbitas de boost, cuyas curvas integrales son hipérbolas, las órbitas del movimiento de aceleración propia constante.

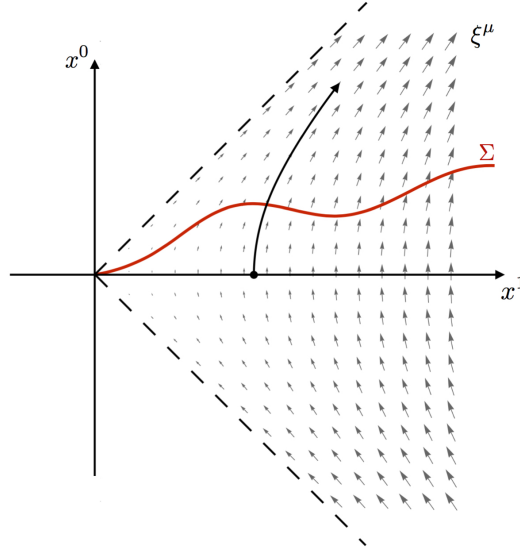


Figura 2.4: Campo vectorial ξ^μ que genera los boosts y la evolución modular en la cuña de Rindler. El operador de boost K_1 puede obtenerse de forma local como una integral de la corriente conservada $J_{1\mu}(s) = \xi_1^\nu T_{\mu\nu}(s)$ a través de cualquier superficie de Cauchy Σ dentro de la cuña de Rindler. El flujo modular del vacío reducido a V son los flujos de boosts, y mapean operadores locales a operadores locales dentro de la cuña de Rindler.

Este teorema sirve para introducir y visualizar muy bien el concepto de flujo modular, que se refiere a la acción del grupo uniparamétrico de unitarios $U(s) = e^{-isH} = \rho_V^{is}$ sobre los operadores localizados en la región, en este caso, la cuña de Rindler. Como sabemos por el teorema, $U(s)$ es también el unitario que implementa los boosts en la simetría de Lorentz, y actúa sobre los campos locales $\phi(x)$ como

$$e^{-isH} \phi(x^\mu) e^{isH} = \phi(f^\mu(x, s)) , \quad (2.2.29)$$

donde $f^\mu(x, s)$ parametriza las hipérbolas que son las órbitas de boost. El parámetro

de boost s , que también podemos llamar tiempo modular, parametriza la coordenada a lo largo de la hipérbola. El operador $\phi(x)$, localizado en x , es enviado por el flujo modular (2.2.29) a lo largo de una hipérbola al operador (local) localizado en $f(x, s)$. De forma explícita las órbitas $f(x, s)$ son

$$x^\pm(s) = x_0^\pm e^{\pm 2\pi s} \quad ; \quad x^\pm = x^0 \pm x^1 . \quad (2.2.30)$$

El flujo modular de Rindler actúa sobre las coordenadas nulas x^+ y x^- de los operadores locales $\phi(x)$ como dilataciones y contracciones, respectivamente, siendo x_0 el valor inicial en el que estaba localizado. Lo importante a notar es que si x está localizado en la cuña de Rindler, entonces también lo estará el operador evolucionado con el Hamiltoniano modular $e^{-isH}\phi(x)e^{isH_V}$ para todo valor del tiempo modular $s \in \mathbb{R}$. Este resultado es más general; vale incluso en el caso de Hamiltonianos modulares no locales. Uno podría esperar que como el Hamiltoniano modular es un operador que pertenece al álgebra, si es el generador de una evolución unitaria sobre elementos del álgebra, entonces el resultado de la evolución modular debe estar dentro del álgebra. En rigor, no todos los Hamiltonianos modulares se pueden escribir solo como elementos de la subálgebra, pero siempre vale que la evolución modular preserva la subálgebra. Ese es el contenido del siguiente teorema.

2.2.3. Teorema de Tomita-Takesaki

El teorema de Tomita-Takesaki se ha convertido en una de las herramientas más importantes en la teoría del álgebra de operadores y ha encontrado múltiples aplicaciones en matemática y física [60, 83–85]. Este teorema es necesario para entender los teoremas de semi-inclusión modular introducidos y usados en el Capítulo 5 para estudiar la estructura Markoviana de vacío.

Sea que el estado $|\Omega\rangle$ es cíclico para \mathcal{A} y \mathcal{A}' (y por lo tanto separador para ambas), entonces la operación

$$A|\Omega\rangle \mapsto A^*|\Omega\rangle , \quad (2.2.31)$$

con $A \in \mathcal{A}$, alcanza para definir un operador S_0 en todo un dominio denso de \mathcal{H} (y lo correspondiente para \mathcal{A}' , aunque no lo necesitamos en esta discusión). Sea S la clausura de S_0 , llamado operador de Tomita respecto del par $(\mathcal{A}, |\Omega\rangle)$. Sea la descomposición polar (única) de S

$$S = J\Delta^{1/2} , \quad (2.2.32)$$

con $\Delta = S^*S$ Hermítico y positivo, llamado operador modular del par $(\mathcal{A}, |\Omega\rangle)$, y J antiunitario, llamado conjugación modular respecto del par $(\mathcal{A}, |\Omega\rangle)$. De esta definición se sigue que $J = J^*$, $J^2 = 1$ y $J\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}J$. El contenido del teorema de Tomita-Takesaki es acerca de las buenas propiedades de estos operadores.

Teorema de Tomita-Takesaki:

Sea \mathcal{A} una subálgebra de von Neumann en \mathcal{H} , y $|\Omega\rangle$ un vector cíclico para \mathcal{A} y \mathcal{A}' . Entonces:

$$1. \quad J|\Omega\rangle = \Delta|\Omega\rangle = |\Omega\rangle, \quad (2.2.33)$$

$$2. \quad J\mathcal{A}J = \mathcal{A}', \quad (2.2.34)$$

$$3. \quad \Delta^{it}\mathcal{A}\Delta^{-it} = \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2.35)$$

El teorema nos asegura la existencia de un grupo uniparamétrico de automorfismos $\sigma_t(A) = \Delta^{it}A\Delta^{-it}$, que llamamos, en nuestro contexto, el flujo modular de $|\Omega\rangle$ respecto a \mathcal{A} . Está claro que el Hamiltoniano modular H se define en estos términos como el operador Hermítico (no necesariamente definido positivo) que es el generador de estos flujos modulares: $H = -\log \Delta$. En el caso finito, $\log \Delta = \log \rho_{\mathcal{A}} - \log \rho_{\mathcal{A}'}$, donde $\rho_{\mathcal{A}}$ es el estado reducido de $|\Omega\rangle$ a la subálgebra \mathcal{A} y $\rho_{\mathcal{A}'}$ el reducido a la subálgebra \mathcal{A}' .

Para ganar intuición sobre los operadores J y Δ es útil ver los siguientes ejemplos. Una de las representaciones más simples y útiles de este teorema lo encontramos en QFT, con $|\Omega\rangle$ el estado de vacío y \mathcal{A} el álgebra de operadores en la cuña de Rindler. Por el teorema de Bisognano-Wichmann, y parte de él que no enunciamos anteriormente, se tiene que $\Delta^{it} = e^{-i 2\pi K_1 t}$, o

$$\log \Delta = -2\pi K_1, \quad (2.2.36)$$

con K_1 el generador de boost en el plano (x^0, x^1) , con lo cual, y como vimos anteriormente, $\sigma_t(\cdot)$ es un automorfismo. Por otro lado

$$J = \Theta U(R_{01}(\pi)), \quad (2.2.37)$$

con Θ el operador de CPT⁹ y $U(R_{01}(\pi))$ el operador unitario en la representación correspondiente que implementa una rotación de ángulo π en el plano (x^0, x^1) . Lo sorprendente de este ejemplo es que ambas operaciones, J y $\sigma_t(\cdot)$, mapean operadores locales en operadores locales. Esto deja de ser así si la región no es Rindler, o si el estado no es el vacío. En tales casos seguirán valiendo (2.2.33)-(2.2.35), pero la imagen de J y $\sigma_t(\cdot)$ sobre campos locales será no local, aunque siempre dentro del álgebra adecuada.

Otro ejemplo, que apunta a la forma explícita de J y Δ , lo podemos encontrar en el caso finito. Sean \mathcal{H} y \mathcal{H}' espacios de Hilbert finitos de dimensión $n = \dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}')$

⁹Operador que conjuga carga e invierte el espacio y tiempo. Sobre la base axiomática (axiomas de Wightman) se demuestra que Θ es una simetría de toda QFT [73]. En realidad, como se discute en [86], la CPT es simetría solo en dimensiones pares. En dimensiones impares uno debería cambiar la inversión espacial, por la rotación R en π sobre el eje de una sola coordenada. La simetría CRT vale en todas las dimensiones.

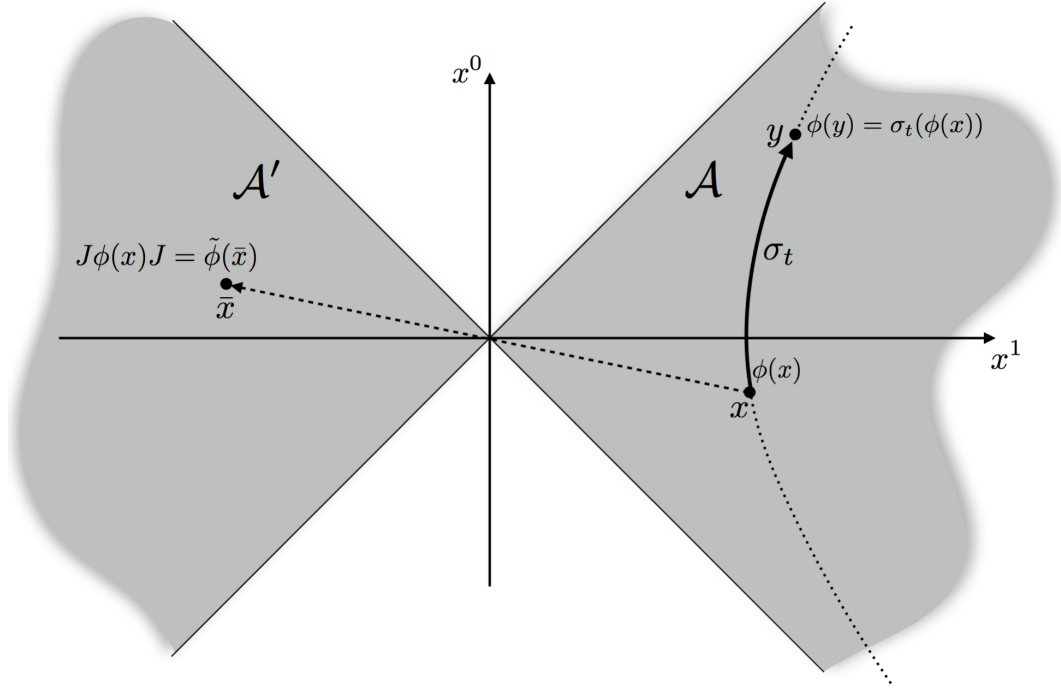


Figura 2.5: Espacio de Minkowski. Tomamos como \mathcal{A} la subálgebra de los operadores localizados en la cuña de Rindler derecha, con lo cual \mathcal{A}' será la cuña de Rindler izquierda (dualidad de Haag). El flujo modular σ_t del vacío y del álgebra \mathcal{A} genera automorfismos locales en \mathcal{A} : flujo geométrico a lo largo de las hipérbolas que envía operadores locales en operadores locales dentro de la subálgebra (en este caso la cuña de Rindler derecha). La conjugación modular J envía al operador local $\phi(x)$ de \mathcal{A} a un operador $\tilde{\phi}(\bar{x}) = \Theta U(R_{01}(\pi))\phi(x)(\Theta U(R_{01}(\pi)))^*$ localizado en el punto $\bar{x} = (-x^0, -x^1, x^2, \dots, x^{d-1})$ de \mathcal{A}' que resulta de rotar x , de coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^{d-1})$, en un ángulo π sobre el plano (x^0, x^1) . Θ es el operador de CPT, y $U(R_{01}(\pi))$ el unitario que implementa, en la representación de ϕ , la rotación de π sobre el plano (x^0, x^1) .

y bases $|a_i\rangle$ y $|a'_i\rangle$ respectivamente. Sea la subálgebra de von Neumann $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes 1_{\mathcal{H}'}$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$. Se puede comprobar que el vector

$$|\Omega\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle \otimes |a'_i\rangle \quad ; \quad \lambda_i > 0 \quad ; \quad \sum_i \sqrt{\lambda_i} = 1 \quad , \quad (2.2.38)$$

es cíclico y separador para \mathcal{A} y de norma uno. Un cálculo directo nos da que los objetos modulares del par $(\mathcal{A}, |\Omega\rangle)$ toman la forma

$$S(|a_i\rangle \otimes |a'_j\rangle) = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} |a_i\rangle \otimes |a'_j\rangle \quad \text{y extendido a } \mathcal{H} \text{ antilinealmente.} \quad (2.2.39)$$

$$\Delta(|a_i\rangle \otimes |a'_j\rangle) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} |a_i\rangle \otimes |a'_j\rangle \quad \text{y extendido a } \mathcal{H} \text{ linealmente.} \quad (2.2.40)$$

$$J(|a_i\rangle \otimes |a'_j\rangle) = |a_j\rangle \otimes |a'_i\rangle \quad \text{y extendido a } \mathcal{H} \text{ antilinealmente.} \quad (2.2.41)$$

De forma más explícita

$$\Delta = \sum_{ij} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} |a_i a'_j\rangle \langle a_i a'_j| , \quad (2.2.42)$$

$$J = \sum_{ij} |a_i a'_j\rangle \langle a_j a'_i| * , \quad (2.2.43)$$

donde $*$ es la conjugación compleja. Notemos que J intercambia los índices en las bases, enviando los operadores de \mathcal{H} a su conmutante. Además, los estados reducidos son

$$\rho_{\mathcal{A}} = \sum_k \lambda_k |a_k\rangle \langle a_k| \otimes 1_{\mathcal{H}'} , \quad \rho_{\mathcal{A}'} = \sum_k \lambda_k 1_{\mathcal{H}} \otimes |a'_k\rangle \langle a'_k| , \quad (2.2.44)$$

con lo cual se puede verificar que

$$\Delta = \rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{A}'}^{-1} . \quad (2.2.45)$$

En el caso finito Δ se puede escribir como el producto de dos operadores que actúan sobre cada subálgebra por separado. Esto no ocurre en ciertas álgebra llamadas álgebras de von Neumann de tipo III, que son precisamente las álgebras con las que se representan los operadores en una QFT. Es usual en la literatura, y para ciertas consideraciones, suponer que la QFT tiene una regularización en la que las restricciones que imponen estas álgebras no sean un problema (por ejemplo, en estas álgebras no podemos representar ni siquiera los estados por matrices densidad). En este caso, el Hamiltoniano modular

$$\hat{H} = -\log \Delta = H_{\mathcal{A}} - H_{\mathcal{A}'} , \quad (2.2.46)$$

actúa sobre todo el espacio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$, pero se compone de las partes $H_{\mathcal{A}} = -\log \rho_{\mathcal{A}}$ y $H_{\mathcal{A}'} = -\log \rho_{\mathcal{A}'}$, que actúan sobre cada subálgebra por separado. Llamaremos Hamiltoniano modular total al definido por el operador modular Δ en (2.2.46), en contraposición con $H_{\mathcal{A}}$ y $H_{\mathcal{A}'}$, y lo denotamos por \hat{H} .

2.2.4. Método de réplicas para calcular la entropía

De los varios métodos que se conocen para calcular la EE [4] en QFT, el método que utiliza el truco de réplicas es muy general y flexible. Sirve como herramienta de cálculo, con el posterior uso de las técnicas de heat-kernel, o como herramienta teórica para demostrar teoremas o conectar fórmulas, o para el cálculo de la entropía en estados de no equilibrio usando el formalismo de Schwinger-Keldysh [87]. Es clave para obtener la importante relación entre la entropía de entrelazado del vacío de una CFT en dos dimensiones y la carga central c de la CFT, que veremos en la próxima Sección 2.2.5, y para la demostración de la fórmula holográfica de Ryu-Takayanagi para calcular la

EE [88, 89]. Para otros métodos analíticos para calcular la EE véase [28].

La idea básica es que las entropías de Rényi S_n (2.1.14), con n entero, tienen, o bien una representación como integral funcional, o bien pueden interpretarse como valor de espectación de unos nuevos operadores (llamados operadores de twist) en una nueva teoría “replicada” y construida a partir de la original. Luego de calcular estas entropías de Rényi S_n para n entero, se intenta obtener una extensión analítica válida en una región del plano complejo n , a partir de la cual se toma el límite $n \rightarrow 1$ para obtener la entropía de entrelazado S

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_n = S . \quad (2.2.47)$$

Veamos primero el procedimiento con la integral funcional y después la interpretación con los operadores de twist.

Tomando en cuenta la discusión sobre la representación con integral funcional de la matriz reducida $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$, nos preguntamos por la integral funcional que representa a $\rho_V^2(\alpha_V, \alpha'_V)$, y en general a $\rho_V^n(\alpha_V, \alpha'_V)$. Según las definiciones

$$\rho_V^2(\alpha_V, \alpha''_V) = \int D\alpha'_V \rho(\alpha_V, \alpha'_V) \rho(\alpha'_V, \alpha''_V) \quad (2.2.48)$$

$$= N^{-2} \int_{\phi(x>0,0^+)=\alpha''_V(\vec{x})}^{\phi(x>0,0^-)=\alpha_V(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)} . \quad (2.2.49)$$

La notación de los límites de integración en (2.2.49) no nos dice mucho sobre cómo debemos tomar esta integral. La integral (2.2.49) debe hacerse por una variedad que, según se sigue de (2.2.48), debe representarse como dos copias de la región de integración \mathcal{C} que representa a $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$ (como la de la Figura 2.3) y pegar estas copias por su borde α' de V . Si tomamos traza de $\rho_V^2(\alpha_V, \alpha''_V)$, lo que equivale a igualar $\alpha = \alpha''$ e integrar, esto implica que tenemos que pegar los bordes α y α'' de las copias. Para obtener $\text{Tr}(\rho_V^3)$, la variedad por la que hay que tomar la integral funcional está representada en la Figura 2.6. En el caso general,

$$\text{Tr} \rho_V^n = \frac{Z(n)}{Z(1)^n} , \quad (2.2.50)$$

donde $Z(n)$ es la función de partición (integral funcional) por la variedad \mathcal{R}_n^V que resulta de pegar cíclicamente los bordes de las copias de la región que nos da la integral funcional de $\rho_V(\alpha_V, \alpha'_V)$. Es posible en algunos casos calcular explícitamente $Z(n)$, por ejemplo, con la técnica de heat-kernel en el caso de campos libres. En general tenemos a nuestra disposición la expresión formal (2.2.50), que puede ser muy útil desde el punto de vista teórico [8, 13, 88–91].

Para ser más precisos, veamos en detalle cómo es la variedad \mathcal{R}_n^V por la que debemos hacer la integral funcional $Z(n) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}[\phi], \mathcal{R}_n^V]$ que nos da $\text{Tr}(\rho_V^n)$ para el vacío de la

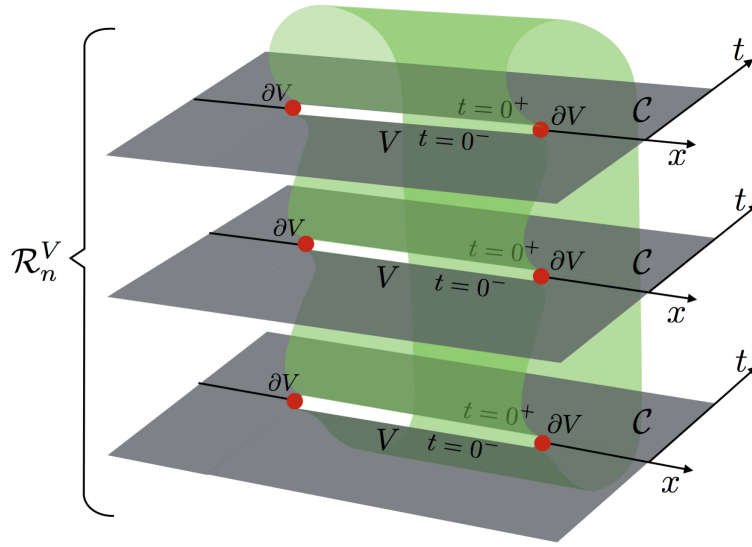


Figura 2.6: Representación $n = 3$ de la variedad R_n^V por la que se hace la integral funcional que es igual a $\text{Tr}(\rho_V^n)$. Esta se construye indentificando los bordes de tiempo $t = 0^+$ y $t = 0^-$ de V de las copias correspondiente y de forma cíclica.

teoría $\mathcal{L}[\phi]$. \mathcal{R}_n^V se construye a partir de la variedad \mathcal{C} donde vive la teoría originalmente, que es un espacio plano, de topología simple y de dimensión d . En el plano (de dimensión $d-1$) de tiempo $t = 0$ (Euclídeo o de Minkowski) de \mathcal{C} , tenemos una región espacial V . Tomamos n copias de la variedad \mathcal{C} con su región espacial V . Identificamos la superficie

$$V_i^- = \{(x, t) \in \mathcal{C}_i, x \in V_i, t = 0^-\}, \quad (2.2.51)$$

de la copia \mathcal{C}_i , con la superficie

$$V_{i+1}^+ = \{(x, t) \in \mathcal{C}_{i+1}, x \in V_{i+1}, t = 0^+\}, \quad (2.2.52)$$

de la copia \mathcal{C}_{i+1} , y estas identificaciones las hacemos módulo n . La variedad que resulta de hacer este pegado cíclico, por las superficies de $t = 0^+, 0^-$ de V , de las copias de \mathcal{C} , es \mathcal{R}_n^V , que tendrá una topología no trivial.

Existe una manera alternativa muy conveniente de pensar o de obtener el mismo resultado de la integral funcional por \mathcal{R}_n^V [8]. La integral funcional $\mathcal{Z}[\mathcal{L}[\phi], \mathcal{R}_n]$ es la integral por todos los valores de un mismo campo $\phi(x)$ (de Lagrangiano $\mathcal{L}[\phi]$) con x la posición en cualesquiera de las n hojas \mathcal{C} de la variedad \mathcal{R}_n^V . En lugar de integrar un mismo campo en la variedad replicada \mathcal{R}_n^V , integramos en la variedad original \mathcal{C} , n réplicas $\{\phi_i(x)\}_{i=1, \dots, n}$ del campo $\phi(x)$ (con lagrangiano $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i(x)\}] = \mathcal{L}[\phi_1] + \dots + \mathcal{L}[\phi_n]$), y agregamos condiciones de contorno sobre los $\{\phi_i(x)\}$ que simulan la topología

no trivial de \mathcal{R}_n^V . Podemos verificar que

$$\mathcal{Z}[\mathcal{L}[\phi], \mathcal{R}_n^V] = \int_{x \in \mathcal{R}_n^V} [d\phi(x)] e^{-\int_{\mathcal{R}_n^V} \mathcal{L}[\phi]}, \quad (2.2.53)$$

es igual a

$$\mathcal{Z}[\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}], \mathcal{C}] = \int_{x \in \mathcal{C} \text{ y condiciones}} [d\phi_1(x) \cdots d\phi_n(x)] e^{-\int_{\mathcal{C}} \mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]}, \quad (2.2.54)$$

con las condiciones

$$\phi_i(x, 0^-) = \phi_{i+1}(x, 0^+) \quad ; \quad x \in V, i = 1, \dots, n, \quad (2.2.55)$$

módulo n y la identidad fuera de V [92].

La integral funcional de la teoría $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]$ define valores de espectación Euclídeos de operadores en el vacío $|0_n\rangle = |0\rangle_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle_n$ de la siguiente forma

$$\langle 0_n | \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) | 0_n \rangle = \int_{x \in \mathcal{C}} [d\phi_1(x) \cdots d\phi_n(x)] \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) e^{-\int_{\mathcal{C}} \mathcal{L}^{(n)}[\{\phi\}]}. \quad (2.2.56)$$

En la teoría $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]$ existe la simetría de permutación de copias, que no estaba en la teoría original $\mathcal{L}[\phi]$. Los operadores que implementan estas simetrías dentro de una región espacial V son llamados operadores de twist. Por ejemplo, en $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]$, a la permutación dentro de la región V (2.2.55), le podemos asociar el operador de twist $\Sigma_n(\partial V)$, cuya acción viene definida por la integral funcional

$$\langle 0_n | \Sigma_n(\partial V) \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) | 0_n \rangle = \int_{x \in \mathcal{C} \text{ y condiciones } \Sigma_n(\partial V)} [d\phi_1(x) \cdots d\phi_n(x)] \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) e^{-\int_{\mathcal{C}} \mathcal{L}^{(n)}[\{\phi\}]}, \quad (2.2.57)$$

donde las condiciones $\Sigma_n(\partial V)$ son las dadas por (2.2.55). El operador de twist $\Sigma_n(\partial V)$ depende solo del borde ∂V de la región V , pues si hacemos que (2.2.55) comunique a las copias $\phi_i(x)$ en otra superficie \tilde{V} homóloga con V , $\partial \tilde{V} = \partial V$, obtendremos la misma integral funcional en (2.2.57).

De esta forma, de (2.2.57) y la igualdad entre (2.2.53) y (2.2.54), tenemos que

$$\langle 0_n | \Sigma_n(\partial V) | 0_n \rangle = \mathcal{Z}[\mathcal{L}[\phi], \mathcal{R}_n^V]. \quad (2.2.58)$$

La integral funcional $\mathcal{Z}[\mathcal{L}[\phi], \mathcal{R}_n^V]$, que nos da la traza $\text{Tr}(\rho_V^n)$, es el valor de espectación del operador de twist $\Sigma_n(\partial V)$ en el vacío replicado $|0_n\rangle$. En general el operador de twist $\Sigma_n(\partial V)$ solo existe en la teoría replicada en campos, y es un operador no local localizado en la frontera ∂V de la región V . Esta forma de ver las cosas es muy útil, ya que sobre

el operador $\Sigma_n(\partial V)$ podemos hacer ciertas manipulaciones. Por ejemplo, cuando la frontera ∂V se componen de componentes disjuntas $(\partial V)_1$ y $(\partial V)_2$, tenemos que $\Sigma_n(\partial V) = \Sigma_n(\partial V)_1 \Sigma_n(\partial V)_2$, (este es el caso cuando V se compone de dos pedazos, o cuando V es una franja) con lo cual podemos investigar el límite cuando estos $\Sigma_n(\partial V)_i$ están muy cerca o lejos, o intentar expresar $\Sigma_n(\partial V)_i$ como una suma de operadores locales. El OPE en el límite nulo de operadores de twist asociados al borde de una franja fue estudiado por primera vez en [93], y será usado en la Sección 5.3 para determinar la forma explícita de ciertos Hamiltonianos modulares. En el caso de dimensión dos, el operador de twist es la multiplicación de dos operadores locales (en los extremos de un intervalo), sobre los cuales podemos aplicar todas las herramientas de las teorías conformes para calcular su valor de espectación, y con esto, la entropía de Rényi y de von Neumann.

2.2.5. Entropía de un intervalo para una CFT en dos dimensiones

En el caso de dos dimensiones, los operadores de twist se localizan en el borde ∂V de V , que son puntos, ya que V solo se compone de segmentos. $\Sigma_n(\partial V)$ se descompone en la multiplicación de operadores de twist locales y localizados en los puntos extremos de los intervalos que componen V . Sea el caso de un solo intervalo, con extremos en los puntos u y v , con lo cual $\Sigma_n(\partial V) = \Phi_{-n}(u)\Phi_n(v)$. Los operadores $\Phi_{\pm n}(u)$ cobran sentido como condiciones sobre la integral funcional. Estas son

$$\Phi_{-n}(u) : \phi_i(x, 0^+) = \phi_{i+1}(x, 0^-) \quad , \quad x \in [u, \infty) \quad , \quad (2.2.59)$$

$$\Phi_{+n}(v) : \phi_i(x, 0^+) = \phi_{i-1}(x, 0^-) \quad , \quad x \in [v, \infty) \quad . \quad (2.2.60)$$

Nótese que la acción combinada de $\Phi_{-n}(u)\Phi_{+n}(v)$ solo comunica distintas copias de los campos dentro del intervalo (u, v) . Tenemos entonces que

$$\text{Tr}(\rho_V^n) \propto \langle \Phi_{-n}(u)\Phi_n(v) \rangle \quad , \quad (2.2.61)$$

donde el valor de espectación es en el vacío $|0_n\rangle$. El siguiente análisis nos muestra que $\Phi_n(v)$ es un operador primario de la teoría $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]$ y de dimensión

$$\Delta_n = \frac{c_n}{24} (1 - 1/n^2) \quad , \quad (2.2.62)$$

donde $c_n = n c$ es la carga central de la teoría replicada en campos $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]$, siendo c la carga central de la teoría original $\mathcal{L}[\phi]$. Tomamos la CFT en dos dimensiones en el espacio Euclídeo parametrizado por la variable compleja w . La simetría conforme en dos dimensiones es el grupo infinito de todas las transformaciones analíticas

$w \mapsto z = f(w)$ en el plano complejo. Ante dichas transformaciones, ciertos operadores, llamados operadores primarios, transforman de la forma más simple como [94]

$$\mathcal{O}(w, \bar{w}) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^{\Delta_{\mathcal{O}}} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right)^{\bar{\Delta}_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) , \quad (2.2.63)$$

con $\Delta_{\mathcal{O}}$ y $\bar{\Delta}_{\mathcal{O}}$ parámetros no negativos a partir de los cuales se obtiene la dimensión anómala (o dimensión conforme, y a veces por abuso de notación, simplemente dimensión) como $\Delta = \Delta_{\mathcal{O}} + \bar{\Delta}_{\mathcal{O}}$ y el espín $s_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}} - \bar{\Delta}_{\mathcal{O}}$. La dimensión conforme Δ de \mathcal{O} es el autovalor del operador generador de dilataciones D , $[D, \mathcal{O}(0)] = \Delta \mathcal{O}(0)$.

La componente holomorfa del tensor de energía momentos $T(w)$, sin embargo, transforma de forma no homogénea [95]

$$T(w) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^2 T(z) + \frac{c}{12} \{z, w\} , \quad (2.2.64)$$

donde c es la carga central de la CFT y

$$\{z, w\} = \frac{z'''}{(z')^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 , \quad (2.2.65)$$

es la derivada de Schwartz o Schwartziana de $z(w)$ respecto a w . El tensor de energía momentos es un primario respecto del subgrupo conforme finito generado por las dilataciones, traslaciones, boosts y transformaciones conformes especiales (en todos estos casos la Schwartziana es cero), pero no es un primario respecto de las transformaciones del resto del grupo infinito conforme en dos dimensiones, ante el cual transforma no homogéneamente. Nótese que la dimensión conforme de T es $\Delta_T = 2$, y en general, en dimensión d , $\Delta_T = d$.

La carga central es una cantidad que caracteriza a la CFT, puede pensarse como el número más importante para señalar a una CFT en la “tabla periódica” de las CFTs, y puede pensarse como una medida del número de grados de libertad de la CFT. Esta cantidad aparece como coeficiente de la extensión central que es el álgebra de Virasoro de la simetría conforme en dos dimensiones. Aparece en múltiples expresiones [96], como el coeficiente del término principal en la expansión del producto del tensor de energía-momentos consigo mismo, en la Ley de Stefan-Boltzmann (densidad de energía en un estado térmico ρ_T a temperatura T) $\langle T_{00} \rangle_{\rho_T} = \frac{\pi c}{6h} (k_B T)^2$, y como veremos ahora, en la entropía de entrelazado de un intervalo [8, 13]. Los valores de c de las CFTs que describen el punto crítico del modelo de Ising, del modelo de Potts de tres estados, o del escalar libre, son $c = 1/2, 4/5, 1$, respectivamente. Estos modelos en particular forman parte de una familia infinita de CFTs, llamados modelos minimales o racionales, que se conocen exactamente, y cuyas cargas centrales vienen dadas por $c = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq}$, con

$p, q \geq 2$ enteros.

El valor de expectación $\langle T(w) \rangle_{\mathcal{C}}$ es cero cuando la CFT vive en el plano complejo \mathcal{C} . Esto se obtiene de invariancia ante traslación y rotación (boosts). Si sobre $T(w)$ hago una transformación $w \mapsto z = f(w)$ que no sea del grupo conforme global $SL(2, \mathbb{C})$ (que es la única que mapea toda la esfera de Riemann en si misma) $\langle T(z) \rangle$ será una función analítica no constante y debe ser singular en algún punto. En estos casos $f(w)$ es tal que se mapea \mathcal{C} a una variedad de Riemann \mathcal{R} con topología no trivial en la cual se rompe invariancia de traslación y/o rotación y se tiene que

$$\langle T(w) \rangle_{\mathcal{R}} \neq 0 . \quad (2.2.66)$$

Para calcular $\text{Tr}(\rho_V^n)$ debemos hacer la integral funcional por una variedad de Riemann \mathcal{R}_n^V que se obtuvo de n copias de \mathcal{C} pegadas de forma cíclica a lo largo de la línea que une los puntos u y v de \mathcal{C} que son los extremos del intervalo V . Afortunadamente, existe una transformación conforme que mapea \mathcal{R}_n^V en \mathcal{C} . Esta es

$$w \mapsto \zeta = \frac{u-w}{v-w} , \quad \zeta \mapsto z = \zeta^{1/n} = \left(\frac{u-w}{v-w} \right)^{1/n} . \quad (2.2.67)$$

La primera envía la ramificación entre u y v a una ramificación entre 0 e ∞ . La segunda desenrolla la variedad resultante al plano complejo \mathcal{C} .

Se tiene entonces que, de $\langle T(w) \rangle_{\mathcal{C}} = 0$, (2.2.64) y (2.2.67)

$$\langle T(z) \rangle_{\mathcal{R}_n^V} = \{z, w\} = c_n \frac{1 - 1/n^2}{24} \frac{(u-v)^2}{(w-u)^2(w-v)^2} , \quad (2.2.68)$$

donde $c_n = nc$ con c la carga central de $\mathcal{L}[\{\phi\}]$ y $T(z) = T_1(z) + \dots + T_n(z)$ el tensor de energía-momentos de la teoría $\mathcal{L}^{(n)}[\{\phi_i\}]$. Ahora, un valor de expectación de un operador de la CFT en la variedad \mathcal{R}_n^V es igual al valor de expectación del operador en la variedad \mathcal{C} con la inserción del operador de twist,

$$\langle T(w) \rangle_{\mathcal{R}_n^V} = \langle T(w) \Phi_{-n}(u) \Phi_n(v) \rangle_{\mathcal{C}} . \quad (2.2.69)$$

Con esto y (2.2.68)

$$\langle T(w) \Phi_{-n}(u) \Phi_n(v) \rangle_{\mathcal{C}} = c \frac{n - 1/n}{24} \frac{(u-v)^2}{(w-u)^2(w-v)^2} . \quad (2.2.70)$$

Usamos ahora la siguiente identidad de Ward [94, 97, 98] que relaciona la función de tres puntos de $T(w)$ y dos operadores primarios y la función de dos puntos de estos

operadores

$$\begin{aligned} \langle T(w)\mathcal{O}_n(u)\mathcal{O}_{-n}(v)\rangle_{\mathcal{C}} &= \\ &= \left(\frac{\Delta_n}{(w-u)^2} + \frac{\Delta_{-n}}{(w-v)^2} + \frac{1}{(w-u)}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{(w-v)}\frac{\partial}{\partial v} \right) \langle \mathcal{O}_n(u)\mathcal{O}_{-n}(v)\rangle_{\mathcal{C}} . \end{aligned} \quad (2.2.71)$$

Como los \mathcal{O} 's son primarios, su función de dos puntos viene determinada por la simetría conforme y dada por

$$\langle \mathcal{O}_n(u)\mathcal{O}_{-n}(v)\rangle_{\mathcal{C}} = \frac{1}{|u-v|^{2\Delta_n+2\Delta_{-n}}} . \quad (2.2.72)$$

Si sustituímos (2.2.72) en (2.2.71), veremos que coincide con (2.2.70) si

$$\Delta_n = \Delta_{-n} = \frac{c}{24} (n - 1/n) , \quad (2.2.73)$$

de lo cual aprendemos que $\Phi_{-n}(u)$ y $\Phi_n(v)$ son operadores primarios de la teoría replicada y de dimensión Δ_n , como en (2.2.62). Con este resultado

$$\text{Tr}(\rho_V^n) \propto \langle \Phi_{-n}(u)\Phi_n(v)\rangle_{\mathcal{C}} = \kappa_n \left(\frac{\epsilon}{|u-v|} \right)^{-\frac{cn}{6}(1-1/n^2)} , \quad (2.2.74)$$

donde hemos introducido las posibles constantes de normalización κ_n (que no tendrán consecuencia sobre el resultado) y la escala de longitud ϵ para hacer coincidir las dimensiones, que interpretamos como un cutoff UV. A partir de aquí obtenemos la entropía de Rényi

$$S_n = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(\rho_V^n) = \frac{c}{6} \frac{1/n - n}{1-n} \log |v-u|/\epsilon + \text{cte} . \quad (2.2.75)$$

Esta expresión tiene una evidente extensión analítica a todo n complejo. En particular, en el límite de $n \rightarrow 1$ obtenemos la entropía de von Neumann o de entrelazado [13]

$$S(l) = \frac{c}{3} \log(l/\epsilon) , \quad (2.2.76)$$

donde hemos llamado $l = |v-u|$ a la longitud del intervalo y omitido la constante.

La fórmula (2.2.76), que nos da la EE del vacío de una CFT (en dos dimensiones) reducido a un intervalo, relaciona dos magnitudes muy importantes. Esta tiene la utilidad inmediata de, por ejemplo, a través de cálculos numéricos sobre la entropía de entrelazado de un intervalo de un sistema en una transición de fase de segundo orden (descrito por una CFT) poder conocer el valor de la carga central de dicha CFT. La fórmula está de acuerdo con la interpretación de c como una medida de los grados de libertad de la teoría, y nos dice que c mide qué tan entrelazado está su vacío. La entropía de un intervalo no depende de otros detalles de la teoría, pero la de dos intervalos

o más necesita más información de la CFT. Con un procedimiento similar al descrito se obtiene la entropía cuando la CFT vive en un círculo de longitud L , o cuando esta está a temperatura finita $T = 1/\beta$ (que es un círculo de longitud β en la dirección de tiempo Euclídeo). Para el caso de temperatura finita

$$S(l, \beta) = \frac{c}{3} \log \left[\left(\frac{\beta}{\pi \epsilon} \right) \sinh \left(\frac{\pi l}{\beta} \right) \right] . \quad (2.2.77)$$

La misma expresión vale para el vacío de una CFT sobre un espacio compacto de longitud L , cambiando arriba $\beta \rightarrow L$ y $\sinh \rightarrow \sin$. Notemos que en el límite $l \ll \beta$ recuperamos (2.2.76), y en el límite $l \gg \beta$ obtenemos el comportamiento extensivo $S(l \gg \beta, \beta) \sim \frac{c\pi\beta}{3} l$.

2.2.6. Entropía de una esfera para una CFT en d dimensiones

La entropía de entrelazado S y la entropía de Rényi S_n asociada a una región del espacio \mathcal{A} en una QFT en dimensión d es divergente UV, y la dependencia principal crece con el área de la región \mathcal{A} , (volumen de la superficie de entrelazado $\partial\mathcal{A}$) [21–23].

$$S(\mathcal{A}) = \frac{\tilde{\mu}}{\epsilon^{d-2}} \text{vol}(\partial\mathcal{A}) + \text{sub-dominantes} , \quad (2.2.78)$$

donde ϵ es un cutoff UV. Esto es consecuencia de que en una QFT existen infinitos grados de libertad que interactúan de forma local, con lo cual, los grados de libertad que más contribuyen al entrelazado entre la región \mathcal{A} y su complemento \mathcal{A}' son aquellos que se disponen arbitrariamente cercanos y a lados opuestos de la superficie de entrelazado $\partial\mathcal{A}$, ver Figura 2.7.

Por la misma localidad de la interacción, los grados de libertad responsables de la divergencia UV de la entropía, se disponen de forma extensiva a lo largo de $\partial\mathcal{A}$, ver Figura 2.7. Esto permite conocer mejor la estructura de las divergencias de $S(\mathcal{A})$, que viene dada, genéricamente, por una suma de integrales de términos geométricos en la superficie $\partial\mathcal{A}$. Para una superficie suave, y para una CFT en el vacío, donde no tenemos ninguna escala de masa, se tiene que

$$S(\mathcal{A}) = \mu_{d-2} \int_{\partial\mathcal{A}} d\sigma + \mu_{d-4} \int_{\partial\mathcal{A}} R[\partial\mathcal{A}] d\sigma + \mu_{d-6} \int_{\partial\mathcal{A}} R^2[\partial\mathcal{A}] d\sigma + \cdots + S_{\text{finita}} . \quad (2.2.79)$$

Los coeficientes $\mu_{d-2k} \sim \epsilon^{-(d-2k)}$, $k \in \mathbb{N}$, tienen dimensión $d - 2k$, y, en general, son no universales, lo que significa que su valor depende del tipo de regularización que se haga de la QFT para calcular $S(\mathcal{A})$. Los términos $R[\partial\mathcal{A}]$, $R^2[\partial\mathcal{A}]$ etc, representan escalares de curvatura genéricos, de la potencia adecuada, y construídos a partir de la métrica inducida y la geometría extrínseca de la superficie $\partial\mathcal{A}$.

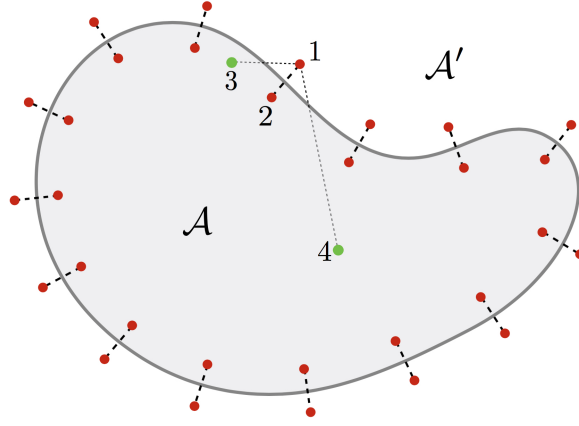


Figura 2.7: En QFT, la contribución principal a la EE de un estado global reducido a una región \mathcal{A} del espacio viene del entrelazado entre los grados de libertad cercanos y dispuestos en lados opuestos de la superficie de entrelazado $\partial\mathcal{A}$. Esta contribución es extensiva a lo largo de $\partial\mathcal{A}$. Por ejemplo, por la localidad del Hamiltoniano, el entrelazado entre el grado de libertad en el punto 1 con el grado de libertad en el punto 3 o en el punto 4, siempre será menor que con el grado de libertad en el punto 2, el “más cercano” al punto 1 (dada una regularización) y que está dentro de la región \mathcal{A} . Como consecuencia, en QFT la EE es UV divergente y extensiva a lo largo de $\partial\mathcal{A}$.

Nótese que la expansión solo incluye las contribuciones que difieren en un número par de potencias del cutoff ϵ respecto término principal de área, y no incluye a las contribuciones “impares” $\mu_{d-3}, \mu_{d-5}, \dots$. Estas últimas estarían en principio presentes en una regularización arbitraria de la teoría, y vendrían acompañadas, para compensar las potencias del cutoff, por la integral de términos geométricos de dimensión $d - s$, con s impar. Por ejemplo, el coeficiente μ_{d-3} estaría acompañado por un término $\int_{\partial\mathcal{A}} K[\partial\mathcal{A}]d\sigma$, con K la curvatura extrínseca de $\partial\mathcal{A}$. En una regularización en donde estos términos están presentes, sin embargo, no se cumple la propiedad de que la entropía de una región es igual a la entropía de la región complementaria cuando el estado global es puro, $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A}')$, (2.1.16), pues la contribución de los términos tipo $\int_{\partial\mathcal{A}} K[\partial\mathcal{A}]d\sigma$, tienen signos opuestos cuando se calculan para \mathcal{A} o para \mathcal{A}' . Nos restringimos a regularizaciones que respeten la propiedad $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A}')$, con lo cual los términos que difieren en una potencia impar del término de área no están presentes. El término finito S_{finita} es en general no local.

En el caso de campos libres, y para ciertas geometrías simples, la estructura de divergencias (2.2.79) puede verificarse calculando directamente $S(\mathcal{A})$ como límite de $S_n(\mathcal{A}) \propto \log \text{Tr}(\rho_{\mathcal{A}}^n) \propto \log Z(n)/Z(1)^n$, relación (2.2.50), y de calcular $Z(n)$ por medio de la expansión de heat-kernel. La misma estructura de divergencias (2.2.79) se obtiene calculando $S(\mathcal{A})$ con la prescripción holográfica de Ryu-Takayanagi que veremos en la Sección 2.3. En el caso de que la superficie $\partial\mathcal{A}$ no sea suave y tenga algún defecto, como esquinas, existen contribuciones adicionales asociadas a estos defectos, también divergentes UV, [4, 99–101].

Para el vacío de una CFT reducido a una esfera de radio r , la expansión (2.2.79) se simplifica (pues solo tenemos el parámetro r para caracterizar a la superficie de entrelazado). Esta toma la forma [47, 49, 102, 103]

$$S_{\text{CFT}}(r) = \mu_{d-2} r^{d-2} + \mu_{d-4} r^{d-4} + \dots + \begin{cases} (-)^{\frac{d-2}{2}} 4A \log(r/\epsilon) & d \text{ par} \\ (-)^{\frac{d-1}{2}} F & d \text{ impar} \end{cases} \quad (2.2.80)$$

En dimensión d par, entre los términos divergentes UV de la expansión (2.2.79), existe uno que resulta de integrar un escalar de curvatura de dimensión $d-2$, $\int_{\partial\mathcal{A}} R^{d-2} [\partial\mathcal{A}] d\sigma$. Para la esfera, este nos da la contribución $\sim \log(r/\epsilon)$ en (2.2.80). El coeficiente A de este término logarítmico es universal: su valor no depende del tipo de regularización que se haga de la CFT para calcular $S_{\text{CFT}}(r)$, y es una cantidad que pertenece y caracteriza a la CFT misma. En dimensión d par este es el único término universal en (2.2.80), y en su presencia, el término constante, que fue omitido en (2.2.80), es no universal. En el caso de dimensión d impar, el término constante F es universal, y pertenece y caracteriza a la CFT misma, aunque para determinarlo a partir de calcular directamente $S_{\text{CFT}}(r)$ con alguna regularización, se necesita una regularización suficientemente buena [103], como la que se logra con la ayuda de la información mutua, que discutiremos en la Sección 2.2.9.

En la Sección 2.2.8 mostraremos que el coeficiente A en $S_{\text{CFT}}(r)$ es el coeficiente de Euler en la anomalía de Weyl de la CFT, y es una cantidad que caracteriza a las teorías conformes de dimensión par, como c caracteriza a las CFT en dimensión $d = 2$. De hecho, para $d = 2$, $A = c$, y (2.2.80) se reduce a (2.2.76). En $d = 4$, por ejemplo, el número A aparece en la función de correlación de tres y cuatro puntos del tensor de energía-momentos de una CFT. La cantidad F en dimensión d impar, en cambio, es altamente no local (no aparece en ningún correlador de operadores locales) y es igual al término finito constante de la energía libre de la CFT calculada sobre la d -esfera [48, 49, 103].

Es la identificación de estos coeficientes en la EE de una esfera en una CFT la que convierte a la entropía de entrelazado en la herramienta ideal para estudiar la irreversibilidad del grupo de renormalización en d dimensiones, pues, se cree que A y F son los candidatos adecuados para expresar la irreversibilidad del grupo de renormalización en dimensión d , al menos así está demostrado en dimensión $d = 2, 3, 4$, como veremos en el próximo Capítulo.

Antes de pasar a la identificación de los coeficientes universales A y F , conviene presentar, por completitud, la derivación de la forma general del Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a una esfera, resultado al que se hace referencia en distintos lugares de esta Tesis.

2.2.7. Hamiltoniano modular de una esfera para el vacío de una CFT

El Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a una esfera es uno de los pocos Hamiltonianos modulares en QFT cuyo flujo modular es local (mapea operadores locales en operadores locales para cualquier valor del parámetro o tiempo modular) [49, 54]. Esto es consecuencia de que existe una transformación conforme que mapea el espacio de Rindler W (completamiento causal de la mitad del espacio) al completamiento causal \mathcal{D} de una esfera de radio R , y por ser el Hamiltoniano modular de Rindler un Hamiltoniano modular local, como vimos en la Sección 2.2.2.

Para ver esto, elijamos en el espacio de Minkowski de dimensión d las coordenadas $x^\pm = r \pm t$, con $t = x^0$, $r = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{d-1})^2}$. El desarrollo causal \mathcal{D} de la esfera $r \leq R$, de radio R , centrada en el origen a tiempo $t = 0$, es la región

$$\mathcal{D} = \{x^+ \leq R\} \cap \{x^- \leq R\}, \quad (2.2.81)$$

ver Figura 2.8. Estamos asumiendo que $x^+ + x^- = 2r \geq 0$.

La siguiente transformación conforme (que se compone de una transformación conforme especial y una traslación), mapea el espacio de Rindler W ($X^1 \geq |X^0|$) en el desarrollo causal \mathcal{D} de la esfera (2.2.81), [54, 59]

$$x^\mu = \frac{X^\mu - (X \cdot X)C^\mu}{1 - 2(X \cdot C) + (X \cdot X)(C \cdot C)} - 2R^2 C^\mu, \quad C^\mu = (0, 1/(2R), 0, \dots, 0). \quad (2.2.82)$$

Esta transformación de coordenadas, transforma la métrica $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$ de Min-

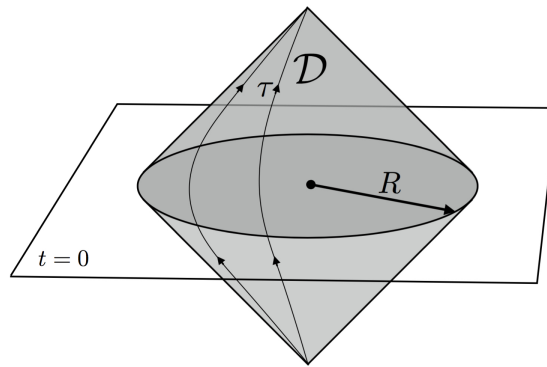


Figura 2.8: Desarrollo causal \mathcal{D} de una esfera de radio R en la superficie de Cauchy de tiempo $t = 0$ en el espacio de Minkowski. El tiempo apunta en la dirección vertical. Se muestran unas líneas del flujo modular (de parámetro τ) del Hamiltoniano modular local $H_{\mathcal{D}}$ de una esfera y para el vacío de una CFT.

kowski, en la métrica $ds^2 = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, con pre-factor conforme

$$\Omega = 1 - 2(X \cdot C) + (X \cdot X)(C \cdot C) = (1 + 2(x \cdot C) + (x \cdot x)(C \cdot C))^{-1} . \quad (2.2.83)$$

Podemos verificar que el filo de la cuña de Rindler, $X^\pm = X^1 \pm X^0 = 0$, se mapea en el borde $r = R$ de la esfera. En particular, el punto $X^\mu = 0$ se mapea al punto $(0, -R, 0, \dots, 0)$ de la esfera, y el infinito espacial de Rindler se mapea al punto $(0, R, 0, \dots, 0)$ de la esfera. Los horizontes futuro y pasado de W se mapean a los horizontes futuro y pasado de \mathcal{D} .

Para obtener el Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a la esfera, tengamos en cuenta que en el caso de Rindler, el Hamiltoniano modular es la carga asociada a la corriente conservada $J_\mu = \xi_{\text{Rind}}^\nu T_{\mu\nu}$ (2.2.28), (2.2.27):

$$H_{\text{Rind}} = \int_{\Sigma_{\text{Rind}}} d\sigma \eta^\mu \xi_{\text{Rind}}^\nu T_{\mu\nu} , \quad (2.2.84)$$

con Σ_{Rind} cualquier superficie de Cauchy en W y $d\sigma$ el elemento de superficie en Σ_{Rind} . Además

$$\xi_{\text{Rind}}^\mu = 2\pi(X^1, X^0, 0, \dots, 0) , \quad (2.2.85)$$

es el campo vectorial generador de las órbitas de boosts que dejan el espacio de Rindler invariante. Ante la transformación (2.2.82), la expresión (2.2.84) se transforma en

$$H_{\mathcal{D}} = \int_{\Sigma_{\mathcal{D}}} d\sigma \eta^\mu \xi_{\mathcal{D}}^\mu T_{\mu\nu} , \quad (2.2.86)$$

con

$$\xi_{\mathcal{D}}^\mu = \frac{\pi}{R}(R^2 - (x^0)^2 - (\vec{x})^2, -2x^0 x^i) , \quad (2.2.87)$$

el campo vectorial generador de la transformación conforme que deja invariante la esfera de radio R centrada en el origen. Con esto, (2.2.86) es nuestro candidato a ser el Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a la esfera.

En QFT, H_V es el Hamiltoniano modular del estado $|0\rangle$ respecto de la región (o subálgebra) V , si satisface las siguientes dos condiciones [59]. El flujo modular

$$U_V(s) = e^{-iH_V s} , \quad (2.2.88)$$

debe ser una simetría de los correladores

$$\langle 0|U_V(s)\mathcal{O}U_V(-s)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle , \quad (2.2.89)$$

y debe cumplir la relación de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) en tiempo modular ima-

ginario $s = i$

$$\langle 0 | \mathcal{O}_1(i) \mathcal{O}_2 | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 | 0 \rangle , \quad (2.2.90)$$

con $\mathcal{O}(s) = U_V(s) \mathcal{O} U_V(-s)$. Estas relaciones, en rigor, se refieren al Hamiltoniano modular total \hat{H} , generador de los automorfismos uniparamétricos del teorema de Tomita-Takesaki: $\hat{H} = -\log \Delta$.

Cuando el Hamiltoniano modular total \hat{H} se puede descomponer en una parte H_V que actúa en V , y una parte $H_{\bar{V}}$ que actúa en el complemento \bar{V} :

$$\hat{H} = H_V \otimes 1_{\bar{V}} - 1_V \otimes H_{\bar{V}} = -\log \rho_V \otimes 1_{\bar{V}} + 1_V \otimes \log \rho_{\bar{V}} , \quad (2.2.91)$$

las condiciones (2.2.89) y (2.2.90) se reducen a

$$\text{Tr}(\rho_V U_V(s) \mathcal{O} U_V(-s)) = \text{Tr}(\rho_V \mathcal{O}) , \quad (2.2.92)$$

y

$$\text{Tr}(\rho_V \mathcal{O}_1(i) \mathcal{O}_2) = \text{Tr}(\rho_V \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1) , \quad (2.2.93)$$

para los operadores \mathcal{O} dentro de la subálgebra V . Estas se verifican simplemente de escribir $\rho_V = e^{-H_V}$, con lo cual $U_V(s) = \rho_V^{is}$.

Sin embargo, para demostrar con toda generalidad que en efecto, (2.2.86) es el Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a una esfera, nos basamos en que las condiciones (2.2.89) y (2.2.90) se satisfacen para el Hamiltoniano modular del espacio de Rindler (Teorema de Bisognano-Wichmann). La transformación conforme (2.2.82), se implementa sobre los operadores y los estados a través de un unitario U_0 , con lo cual se tiene que

$$U_{\mathcal{D}}(s) = U_0 U_{\text{Rind}}(s) U_0^{-1} . \quad (2.2.94)$$

En una CFT, el unitario U_0 transforma a los operadores primarios de espín cero como

$$\phi(x) = \Omega(X)^{\Delta} U_0 \phi(X) U_0^{-1} , \quad (2.2.95)$$

donde Δ es la dimensión conforme del operador ϕ , y Ω viene dada por la expresión (2.2.83). Esto implica que el flujo modular $U_{\mathcal{D}}$ actúa sobre los operadores primarios de la CFT como

$$U_{\mathcal{D}}(s) \phi(x[s_0]) U_{\mathcal{D}}(-s) = \Omega(x[s_0])^{\Delta} \Omega(x[s_0 + s])^{-\Delta} \phi(x[s_0 + s]) . \quad (2.2.96)$$

Como consecuencia, el flujo modular $U_{\mathcal{D}}(s)$ transforma a los correladores de una

CFT de la forma “covariante”

$$\begin{aligned} & \Omega(x_1[s_0])^{-\Delta_1} \cdots \Omega(x_n[s_0])^{-\Delta_n} \langle 0 | \phi_1(x_1[s_0]) \cdots \phi_n(x_n[s_0]) | 0 \rangle \\ &= \Omega(x_1[s_0 + s])^{-\Delta_1} \cdots \Omega(x_n[s_0 + s])^{-\Delta_n} \langle 0 | \phi_1(x_1[s_0 + s]) \cdots \phi_n(x_n[s_0 + s]) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (2.2.97)$$

Aquí se tuvo en cuenta que U_0 deja invariante el vacío de la CFT, por ser U_0 una simetría del grupo conforme $U_0|0\rangle = |0\rangle$. Para una CFT, la condición (2.2.89) debe relajarse a la forma (2.2.97), en cuyo caso, es evidentemente satisfecha por la evolución modular $U_{\mathcal{D}}$.

La segunda condición (2.2.90) se verifica teniendo en cuenta que el flujo modular de Rindler satisface la condición KMS [59]

$$\langle \phi_1(X[s_0 + i]) \phi_2(Y[s_0]) \rangle = \langle \phi_2(Y[s_0]) \phi_1(X[s_0]) \rangle , \quad (2.2.98)$$

donde $\phi_1(X[s_0 + i]) = U_{\text{Rind}}(i) \phi_1(X[s_0]) U_{\text{Rind}}(-i)$. Transformando esta expresión con U_0 , nos queda

$$\Omega^{-\Delta}(X[s_0 + i]) \Omega^{\Delta}(X[s_0]) \langle \phi_1(x[s_0 + i]) \phi_2(y[s_0]) \rangle = \langle \phi_2(y[s_0]) \phi_1(x[s_0]) \rangle , \quad (2.2.99)$$

con $\phi_1(x[s_0 + i]) = U_{\mathcal{D}}(i) \phi_1(x[s_0]) U_{\mathcal{D}}(-i)$. Teniendo en cuenta que

$$X^{\pm}(s) = X_0^{\pm} e^{\pm 2\pi s} ; \quad X^{\pm} = X^1 \pm X^0 , \quad (2.2.100)$$

para los flujos modulares de Rindler de parámetro s , vemos que las órbitas

$$X^{\pm}[s_0 + i] = X_0^{\pm} e^{\pm 2\pi(s_0 + i)} = X_0^{\pm} e^{\pm 2\pi s_0} = X^{\pm}[s_0] , \quad (2.2.101)$$

son periódicas con período imaginario i , con lo cual $\Omega^{-\Delta}(X[s_0 + i]) \Omega^{\Delta}(X[s_0]) = 1$ en (2.2.99), y el resto de la expresión es la condición KMS para $U_{\mathcal{D}}$:

$$\langle U_{\mathcal{D}}(i) \phi_1(x) U_{\mathcal{D}}(-i) \phi_2(y) \rangle = \langle \phi_2(y) \phi_1(x) \rangle . \quad (2.2.102)$$

Concluimos entonces que (2.2.94), (2.2.86) es el Hamiltoniano modular del vacío de una CFT reducido a una esfera.

Las órbitas $X^{\pm}(s) = X_0^{\pm} e^{\pm 2\pi s}$, del flujo modular local de Rindler, se mapean, por la transformación (2.2.82), en las órbitas

$$x^{\pm}(s) = R \frac{(R + x_0^{\pm}) - e^{\mp 2\pi s} (R - x_0^{\pm})}{(R + x_0^{\pm}) + e^{\mp 2\pi s} (R - x_0^{\pm})} , \quad (2.2.103)$$

del flujo modular local de \mathcal{D} , ver Figura 2.8. A pesar de que el flujo modular $U_{\mathcal{D}}$ transforma a los campos de forma covariante, como en (2.2.96), lo hace de forma local:

mapea operadores locales a operadores locales para todo valor del parámetro modular¹⁰.

Sobre la superficie de Cauchy de $t = 0$, la expresión (2.2.86) se reduce a

$$H_{\mathcal{D}} = 2\pi \int_{r < R} d^{d-1}x \frac{(R^2 - r^2)}{2R} T_{00}(t = 0, x) . \quad (2.2.104)$$

2.2.8. La entropía de la $(d - 2)$ -esfera y la energía libre en la d -esfera

Para relacionar los términos universales en la EE de una esfera (2.2.80), con las cantidades intrínsecas de una CFT, A y F , (en dependencia de si la dimensión es par o impar), hacemos un mapeo conforme del desarrollo causal de la esfera de radio R , al espacio de Sitter de radio de curvatura R . Mediante esta transformación, el vacío de la CFT reducido a la esfera se mapea a un estado térmico de temperatura $(2\pi R)^{-1}$ en el espacio de de Sitter. Esta transformación la implementa un operador unitario U_1 , que preserva la entropía, transformando el problema de determinar la EE del vacío en una esfera, al problema de determinar la entropía termodinámica en el espacio de Sitter [49].

El espacio de Sitter es un espacio con signatura Lorentziana, máximamente simétrico y conformemente plano. Su métrica se puede obtener como la métrica inducida sobre el hiperboloide de una hoja con eje de simetría a lo largo de la dirección temporal de un espacio de Minkowski. Sea la métrica de Minkowski en dimensión d .

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\omega_{d-2}^2 , \quad (2.2.105)$$

con ω las variables angulares sobre la $(d - 2)$ -esfera y r la distancia radial espacial en Minkowski. La siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} t &= R \frac{\cos \theta \sinh(\tau/R)}{1 + \cos \theta \cosh(\tau/R)} , \\ r &= R \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta \cosh(\tau/R)} , \end{aligned} \quad (2.2.106)$$

transforma la métrica (2.2.105) a la forma

$$ds^2 = \Omega^2 \left[-\cos^2 \theta d\tau^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\omega_{d-2}^2) \right] , \quad (2.2.107)$$

con $\Omega = (1 + \cos \theta \cosh(\tau/R))^{-1}$. Al eliminar el factor conforme Ω^2 , esta métrica corresponde a la del espacio de Sitter de dimensión d y radio de curvatura R . De (2.2.106),

¹⁰En el espacio de Minkowski no compactificado, y como se discute en la Sección 5.2, a partir de cierto valor del parámetro modular, el flujo modular de la esfera deja de ser local. Sin embargo, este flujo modular es siempre local en el cilindro que resulta de compactificar las direcciones espaciales en el espacio de Minkowski.

podemos ver que

$$\begin{aligned}\tau \rightarrow \pm\infty & : (t, r) \rightarrow (\pm R, 0) \\ \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} & : (t, r) \rightarrow (0, R) .\end{aligned}\tag{2.2.108}$$

La transformación (2.2.106) cubre precisamente el desarrollo causal \mathcal{D} de la esfera de radio R a tiempo $t = 0$ en Minkowski, y la mapea a la carta estática del espacio de de Sitter $\theta \in (0, \pi/2)$, siendo $\theta = \pi/2$ el lugar geométrico del horizonte cosmológico del espacio de Sitter.

Por otro lado, el resultado de la sección anterior nos dice que el vacío de una CFT reducido a una esfera

$$\rho_{\mathcal{D}} = \frac{e^{-H_{\mathcal{D}}}}{\text{Tr}(e^{-H_{\mathcal{D}}})} ,\tag{2.2.109}$$

es térmico, de temperatura $\beta = 1$, respecto de la evolución $U_{\mathcal{D}}(s) = e^{-iH_{\mathcal{D}}s}$. Si en lugar de usar el tiempo modular adimensional s , introducimos una escala R (el radio de la esfera), y medimos la evolución modular con el tiempo $\tau = 2\pi R s$, el estado $\rho_{\mathcal{D}}$ es térmico de temperatura $\beta = 2\pi R$ respecto del Hamiltoniano H_{τ} , dado por

$$H_{\mathcal{D}} - \log \text{Tr}(e^{-H_{\mathcal{D}}}) = (2\pi R)H_{\tau} - \log \text{Tr}(e^{-2\pi R H_{\tau}}) .\tag{2.2.110}$$

El Hamiltoniano H_{τ} es el generador de las transformaciones

$$x^{\pm}(\tau) = R \frac{(R + x_0^{\pm}) - e^{\mp\tau/R}(R - x_0^{\pm})}{(R + x_0^{\pm}) + e^{\mp\tau/R}(R - x_0^{\pm})} .\tag{2.2.111}$$

La importancia de la transformación (2.2.106) reside en el hecho de que la evolución modular τ en \mathcal{D} , dada por (2.2.111), se mapea a la evolución temporal τ en el espacio de de Sitter, con lo cual, el estado térmico $\rho_{\mathcal{D}}$ se mapea, a través del unitario U_1 que implementa (2.2.106), al estado ρ_{dS} , térmico y de temperatura inversa $\beta = 2\pi R$ respecto del Hamiltoniano del espacio de Sitter H_{dS} (generador de las traslaciones en el tiempo τ). O sea, la transformación (2.2.106) transforma un Hamiltoniano modular en Minkowski, en un Hamiltoniano “real” en de Sitter.

$$\rho_{dS} = U_1 \rho_{\mathcal{D}} U_1^{-1} = \frac{e^{-2\pi R H_{dS}}}{\text{Tr}(e^{-2\pi R H_{dS}})} .\tag{2.2.112}$$

Esto convierte el problema de calcular la entropía de $\rho_{\mathcal{D}}$, en el problema de calcular la entropía termodinámica del estado ρ_{dS} .

$$S(\rho_{\mathcal{D}}) = S(U_1^{-1} \rho_{dS} U_1) = S(\rho_{dS}) .\tag{2.2.113}$$

La entropía del estado térmico

$$\rho_{dS} = \frac{e^{-\beta H_{dS}}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_{dS}})} , \quad (2.2.114)$$

viene dada por

$$S(\rho_{\mathcal{D}}) = S(\rho_{dS}) = -\text{Tr}(\rho_{dS} \log \rho_{dS}) = \beta \text{Tr}(\rho_{dS} H_{dS}) + \log \text{Tr}(e^{-\beta H_{dS}}) = \beta E - F , \quad (2.2.115)$$

con $F = -\log Z$, la energía libre de la función de partición $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H_{dS}})$. El término de energía E es el valor de espectación del operador que genera las traslaciones temporales. Como estas traslaciones temporales son una simetría de Killing, E es la energía de Killing, y puede ser expresada como

$$E = \int_V d^{d-1}x \sqrt{h} \langle T_{\mu\nu} \rangle \xi^\mu \eta^\nu = - \int_V d^{d-1}x \sqrt{-g} \langle T^\nu{}_\nu \rangle , \quad (2.2.116)$$

donde la integral es por toda una superficie V de tiempo constante τ hasta el horizonte cosmológico $\theta = \pi/2$. En la segunda igualdad de (2.2.116), se tuvo en cuenta que $\eta^\mu \partial_\mu = \sqrt{|g^{\tau\tau}|} \partial_\tau$ es el vector normal a V , y que $\xi^\mu \partial_\mu = \partial_\tau$ es el vector de Killing asociado a la traslación temporal τ . El estado ρ_{dS} , por ser el transformado conforme del vacío de una CFT, es invariante ante el grupo de simetría de de Sitter, con lo cual

$$\langle T^\mu{}_\nu \rangle = \kappa \delta^\mu{}_\nu , \quad (2.2.117)$$

con κ una constante.

En general, y solo en dimensión d par, el valor de espectación de la traza del tensor de energía-momentos de una CFT en un espacio curvo no es cero, sino que tiene una contribución anómala

$$\langle T^\nu{}_\nu \rangle = \sum B_n I_n - 2(-1)^{d/2} A E_d , \quad (2.2.118)$$

donde E_d es la densidad de Euler en d dimensiones (número geométrico topológico) e I_n son escalares geométricos invariantes de Weyl, por lo que son iguales a cero para métricas conformemente planas. Los coeficientes anómalos B_n y A , caracterizan a la CFT. Por ejemplo, A aparece en la función de tres puntos del tensor de energía-momentos de la CFT en espacio plano. Como la métrica de de Sitter es conformemente plana, tenemos que $I_n = 0$, y la densidad de Euler E_d será una constante que depende del radio R del espacio de Sitter. De (2.2.117) y (2.2.118), la constante κ queda fijada como

$$\langle T^\mu{}_\nu \rangle = -2(-1)^{d/2} A \frac{E_d}{d} \delta^\mu{}_\nu , \quad (2.2.119)$$

para d par, con lo cual

$$E = 2(-1)^{d/2} A \frac{E_d}{d} R^{d-1} \text{vol}(S^{d-2}) \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin^{d-2} \theta , \quad (2.2.120)$$

con $\text{vol}(S^{d-2})$ el volumen de la $(d-2)$ -esfera, que resulta de integrar las variables angulares en (2.2.107). Lo que nos interesa de este resultado es que la energía E es finita en dimensión d par, y es igual a cero en dimensión d impar. Por ello, no será relevante en lo que sigue, dado que solo estamos interesados en la identificación de los términos universales en la entropía, que, en dimensión par es el coeficiente del término logarítmico, que no se puede modificar por la contribución finita de E , y en dimensión impar es el término constante, que tampoco se puede modificar por E , ya que $E = 0$ en dimensión impar.

La identificación de los términos universales en $S(\rho_{\mathcal{D}})$ vendrá exclusivamente de la parte de la energía libre $F = -\log \text{Tr}(e^{-2\pi R H_{ds}})$ en (2.2.115). Para calcular esta última, pasamos a tiempo imaginario τ_E , y compactificamos esta dirección de tiempo Euclídeo con un período $2\pi R$. Al hacer esto, la métrica de de Sitter se transforma en la métrica de la d -esfera de radio R ¹¹

$$ds^2 = \cos^2 \theta d\tau^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\omega_{d-2}^2) . \quad (2.2.121)$$

Concluimos de aquí que la parte universal en la entropía de entrelazado de una $(d-2)$ -esfera en el espacio de Minkowski es igual a la parte universal de la energía libre de la CFT Euclídea sobre la d -esfera.

$$S(\rho_{\mathcal{D}})|_{\text{univ}} = \log Z(S^d)|_{\text{univ}} . \quad (2.2.122)$$

En dimensión d par estamos interesados en el coeficiente logarítmico de $\log Z(S^d)$. Esta tiene una expansión de la forma

$$-\log Z = \alpha_d \frac{R^d}{\epsilon^d} + \cdots + \alpha_0 \log(R/\epsilon) - F_0 , \quad (2.2.123)$$

donde ϵ es un cutoff UV. El coeficiente α_0 viene determinado por la anomalía de traza conforme. Para ver esto, consideremos la transformación infinitesimal de la métrica

¹¹Para ver que la métrica (2.2.121) es en efecto la métrica de una esfera, conviene pasar a las coordenadas: $\sin \theta = \sin \theta_1 \sin \theta_2$, y $\tan(\tau/R) \cos \theta_2 \cos \theta_1$, en la cual métrica queda

$$ds^2 = R^2(d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\omega_{d-2}^2) .$$

$g^{\mu\nu} \rightarrow (1 - 2\delta\lambda)g^{\mu\nu}$. Como

$$-\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \log Z}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle + (\text{divergencias}) , \quad (2.2.124)$$

tenemos que

$$\frac{\delta \log Z}{\delta \lambda} = \int d^d x \sqrt{g} \langle T^\mu{}_\mu \rangle + (\text{divergencias}) . \quad (2.2.125)$$

Debido a la invariancia conforme de la acción, obtenemos el mismo resultado si hacemos un cambio en la métrica manteniendo el cutoff fijo, que haciendo un cambio en el cutoff $\epsilon \rightarrow (1 - 2\delta\lambda)\epsilon$ y dejando la métrica fija. Por ello, y teniendo en cuenta (2.2.123), obtenemos que

$$\alpha_0 = \int d^d x \sqrt{g} \langle T^\mu{}_\mu \rangle . \quad (2.2.126)$$

Usando la expresión (2.2.118), y el hecho de que estamos en la d -esfera, que es conformemente plana, con lo cual $I_n = 0$, y la densidad de Euler E_d es tal que $\int_{S^d} d^d x E_d = 2$, obtenemos

$$\alpha_0 = (-1)^{d/2-1} 4A . \quad (2.2.127)$$

Se tiene entonces en dimensión par que

$$S(\rho_{\mathcal{D}})|_{\text{univ}, d \text{ par}} = (-1)^{d/2} 4A \log(R/\epsilon) . \quad (2.2.128)$$

En dimensión d impar, en la expansión (2.2.124) no tenemos un término logarítmico, y la parte universal de $-\log Z$ es simplemente el término constante F_0 , que puede expresarse en términos de la cantidad F siempre positiva como $F_0 = (-1)^{\frac{d-1}{2}} F$, con lo cual

$$S(\rho_{\mathcal{D}})|_{\text{univ}, d \text{ impar}} = (-1)^{\frac{d-1}{2}} F . \quad (2.2.129)$$

El término constante F en la energía libre de la d -esfera está determinado de forma no ambigua, dado que no existen contribuciones logarítmicas en dimensión impar, y el resto de las contribuciones UV divergentes son potencias enteras inversas de cutoff, que no pueden contaminar el valor de F . El número F caracteriza a las CFTs en dimensiones impares, aunque es una cantidad altamente no local, que no aparece en los correladores de operadores locales.

2.2.9. La entropía de entrelazado como límite de la información mutua

En QFT las divergencias UV de entropía de entrelazado de una región son locales y extensivas a lo largo de la superficie de entrelazado. Dado este hecho, podemos construir una forma de regularizar la EE totalmente general y geométrica con ayuda de

la información mutua. La información mutua de un estado global y dos regiones \mathcal{A} y \mathcal{B} viene dada por

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) - S(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) . \quad (2.2.130)$$

Si estamos interesados en calcular la EE $S(A)$ de una región A , podemos proceder así. Elegimos como la región \mathcal{A} de (2.2.130) a la región $A_{\epsilon/2}$ que resulta de contraer en una distancia $\epsilon/2$ a la región A , y como región \mathcal{B} de (2.2.130) a la región $\bar{A}_{\epsilon/2}$ que resulta de contraer en una distancia $\epsilon/2$ el complemento \bar{A} de la región A . Geométricamente, esto deja libre entre las regiones $A_{\epsilon/2}$ y $\bar{A}_{\epsilon/2}$ una franja de ancho ϵ , ver Figura 2.9. Si el estado global es puro, la entropía de esta franja $S(\text{franja}_\epsilon)$ es igual a la entropía de su complemento, con lo cual

$$S(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = S(A_{\epsilon/2} \cup \bar{A}_{\epsilon/2}) = S(\text{franja}_\epsilon) . \quad (2.2.131)$$

Podemos calcular ahora cada término en

$$I(A_{\epsilon/2}, \bar{A}_{\epsilon/2}) = S(A_{\epsilon/2}) + S(\bar{A}_{\epsilon/2}) - S(\text{franja}_\epsilon) , \quad (2.2.132)$$

regularizando a la QFT misma de la forma que creamos más conveniente. En el límite al continuo de cualesquiera de estas regularizaciones, todas la divergencias UV se cancelan en la combinación (2.2.132), pues estas divergencias son locales y extensivas en las superficies de entrelazado, y la cantidad $I(A_{\epsilon/2}, \bar{A}_{\epsilon/2})$ es finita y totalmente física.

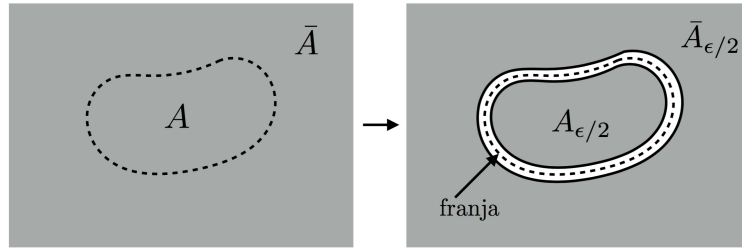


Figura 2.9: Arreglo geométrico para calcular la entropía de entrelazado de la región A usando la información mutua.

Ahora podemos analizar el límite de $\epsilon \rightarrow 0$. En este límite $S(A_{\epsilon/2}) \rightarrow S(A)$, $S(\bar{A}_{\epsilon/2}) \rightarrow S(\bar{A}) = S(A)$ (estado global puro) y $S(\text{franja}_\epsilon) \rightarrow 0$, con lo cual

$$S(A) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(A_{\epsilon/2}, \bar{A}_{\epsilon/2}) . \quad (2.2.133)$$

Esto nos da una prescripción general para regularizar la EE de cualquier región $S(A)$ sin deformar a la QFT misma, o sea, la cantidad $I(A_{\epsilon/2}, \bar{A}_{\epsilon/2})$ pertenece directamente a la teoría del continuo. La distancia ϵ es un cutoff geométrico sobre las regiones, y no sobre la teoría. En el Apéndice C se discute además cómo esta regularización puede

hacerse invariante de Lorentz.

2.3. Entropía de Entrelazado en Holografía

La holografía es una propuesta de lo que debe ser la gravedad cuántica. La gravedad es la única fuerza que no hemos logrado entender a nivel cuántico. No se conoce, por ejemplo, cómo un agujero negro procesa la materia que gravita hacia él y la devuelve en forma de radiación de una forma unitaria y de acuerdo con lo que uno esperaría en una descripción cuántica. Los agujeros negros son unos de los objetos gravitatorios con las características más interesantes y extremas. Se cree que es la memoria más densa posible [104], el procesador (computadora) más rápido posible [105], el sistema cuántico más caótico posible [106], con exponente λ de Liapunov que satura la cota de caos cuántica: $\lambda \leq 2\pi T/\hbar$, con T la temperatura. Se espera por ello que muestre de la forma más clara, como de hecho lo hace, contradicciones y aparentes paradojas que hacen evidente la necesidad de una teoría cuántica de la gravedad, o gravedad cuántica. Entre los intentos hechos a lo largo de prácticamente un siglo para cuantizar la gravedad, una de las hipótesis más prometedoras indica que la gravedad cuántica es holográfica. Esto significa que la gravedad cuántica es dual a otra teoría muy distinta, que no tiene gravedad, y que está definida en una dimensión menos. La motivación de esta idea comenzó con el resultado de Bekenstein y Hawking de que los agujeros negros, para mantener la validez de la Segunda Ley de la Termodinámica, deberían tener asociada una entropía, y que esta entropía crecía con el área del agujero negro, y no como el volumen, sugiriendo que todos los grados de libertad de los objetos que caen hacia un agujero negro se disponen de forma extensiva sobre la superficie, y no sobre el volumen del agujero negro. La idea de la holografía se desarrolló con los trabajos de 't Hooft y Susskind [107, 108] y en 1997 se ofreció el primer ejemplo concreto de dualidad holográfica, la dualidad AdS/CFT, propuesta por Maldacena [18, 19]. La dualidad implica, por un lado, teorías con simetrías de gauge $SU(N)$ en d dimensiones, y por otro lado, la supergravedad (o teoría de cuerdas supersimétrica) en un espacio asintóticamente anti de Sitter (AdS_{d+1}) en dimensión $d + 1$. Uno de los ejemplos específicos de dualidad holográfica propuestos en [19] es que la teoría de gauge $SU(N)$ conforme supersimétrica de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$ y acoplamiento g_{YM} en dimensión $d = 4$, es dual a la teoría de supercuerdas tipo *IIB* en $AdS_5 \times S^5$, con acoplamiento g_{st} , siendo $L = (g_{YM}^2 N)^{1/4}$ el radio de curvatura del espacio AdS_5 y de la esfera S^5 y $g_{st} \propto g_{YM}^2$. Esta es la conjetura en su versión total, y la dualidad significa, en primer término, que las funciones de partición de estas dos teorías son iguales. En el límite de N grande y el acoplamiento de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$ fijo, pero también grande, la teoría de cuerdas es débilmente acoplada y la aproximación de supergravedad es suficiente. El estudio del límite de N grande de las teorías de gauge, y en general de

teorías con N grados de libertad internos, ha sido muy fructífero en muchos problemas, básicamente por la simplificación que ocurre en los diagramas de Feynman en este límite [109]. Con esto, los correladores de la teoría Super-Yang-Mills con grupo $SU(N)$, $\mathcal{N} = 4$ vienen dados en este límite por la aproximación de árbol de la acción de supergravedad en AdS_5 , que básicamente es evaluar una solución de campos libres en la acción de Einstein-Hilbert. El espacio AdS_{d+1} es un espacio de curvatura constante negativa, y

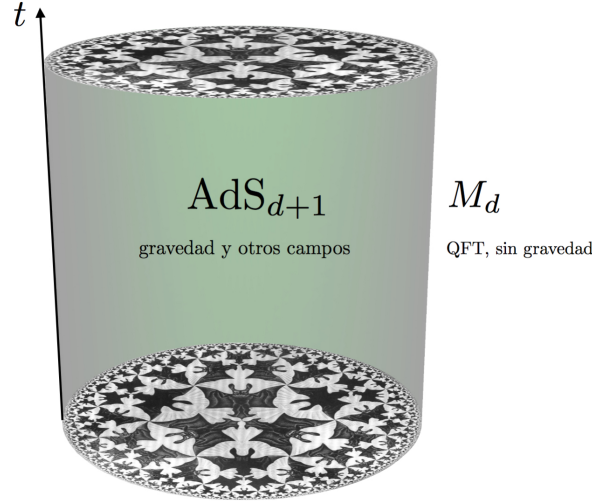


Figura 2.10: La dualidad holográfica AdS/CFT relaciona una teoría de gravedad y otros campos materiales en un espacio asintóticamente AdS en $d + 1$ dimensiones con una teoría de campos sin gravedad en un espacio de Minkowski M_d de d dimensiones.

caracterizado por el radio de curvatura L . El espacio AdS_{d+1} tiene un borde M_d en el infinito espacial, que podemos identificar con el espacio de Minkowski o Euclídeo donde vive la teoría conforme dual. El grupo $SO(2, d)$ de isometrías de AdS_{d+1} se representa en M_d como el grupo conforme. Nos referiremos a M_d como el borde de AdS_{d+1} y al mismo AdS_{d+1} como el bulk. Las dimensiones Δ de los operadores en la CFT en M_d vienen dados por las masas m de los campos debilmente acoplados en el bulk, por la relación

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2, \quad (2.3.1)$$

siendo d la dimensión de M_d y L el radio de curvatura de AdS_{d+1} .

Sea $Z_S^{d+1}[\phi_0]$ la función de partición de la teoría de supergravedad (o supercuerdas) para los campos ϕ con condiciones de contorno ϕ_0 en el borde de AdS_{d+1} . En el límite de N grande tenemos que $Z_S^{d+1}[\phi_0]$ puede aproximarse por su valor en capa de masa de la acción de supergravedad $Z_S^{d+1}[\phi_0] = \exp(-I_S^{d+1}[\phi])$, y en el límite de λ grande $I_S^{d+1}(\phi)$ tiene como término principal a la acción de Einstein-Hilbert más la acción de los campos materiales ϕ . En este caso, los valores de ϕ_0 en M_d son fuentes para los

operadores \mathcal{O} de la CFT, y tenemos la importante relación

$$\left\langle \exp \int_{M_d} \phi_0 \mathcal{O} \right\rangle_{CFT_d} = Z_S^{d+1}[\phi_0] . \quad (2.3.2)$$

El valor de borde de los campos $\phi(z, x)$ en el bulk, con z la coordenada emergente holográfica, es (en las coordenadas de Poincaré de AdS, en donde $z = 0$ corresponde con M_d) $\lim_{z \rightarrow 0} \phi(z, x) = \phi_0(x) z^{d-\Delta}$, siendo Δ la dimensión del operador al que se acopla $\phi_0(x)$ en M_d . Derivando respecto de ϕ_0 obtenemos los correladores de los \mathcal{O} a partir de la cuenta gravitatoria en AdS_{d+1} .

La CFT que vive en el borde de AdS codifica de forma muy no local y a modo de un holograma todo lo que sucede dentro del bulk. Ambas teorías tienen muchos otros detalles sobre los que uno puede preguntarse por el correspondiente dual. Las entradas de este diccionario holográfico se han estudiado a lo largo de los últimos veinte años, a la vez que se ha comprobado la total consistencia de esta conjetura. La dualidad se extiende de forma natural a las QFT en M_d , interpretándose la dirección z extra holográfica que apunta desde M_d hacia el interior del bulk como la escala de energía de la QFT. Como veremos en la Sección 4.3, esto da una descripción muy visual del flujo del grupo de renormalización.

La dualidad holográfica ha permitido ver nuevos aspectos de las QFT que no son simples de ver sin la dualidad, o aspectos cuya explicación ha conducido de forma natural a hacer uso del lenguaje y los conceptos de la Teoría de la Información Cuántica. Entre los ejemplos más relevantes de esto último está el dual holográfico de la entropía de entrelazado de una región en M_d , prescrito por Ryu y Takayanagi [2, 110]. Esta prescripción convierte el cálculo de la EE de una región \mathcal{A} en el espacio M_d de la QFT en el siguiente problema gravitatorio geométrico.

A ciertos estados $|\Psi\rangle$ de la QFT que vive en el borde M_d le corresponden estados gravitatorios clásicos en el bulk, o sea, ciertas geometrías asintóticamente AdS (de métricas $g_{|\Psi}\rangle$). Sea que en M_d tenemos tal estado, y en el bulk una geometría que corresponde a ese estado. Sean en tal espacio curvo en el bulk todas las superficies m sostenidas o con borde en la frontera $\partial\mathcal{A}$ de la región \mathcal{A} elegida sobre M_d a tiempo $t = 0$. El espacio M_d tiene dimensión d , la frontera o superficie de entrelazado $\partial\mathcal{A}$ en M_d tiene dimensión $d - 2$, y la superficie m tiene dimensión $d - 1$, y está embebida en el espacio curvo asintóticamente AdS de dimensión $d + 1$. Elegimos de todas las m la de área mínima en $g_{|\Psi}\rangle$, y la llamamos $m_{\mathcal{A}}$. La prescripción nos dice que la entropía de entrelazado $S(\mathcal{A})$ del estado $|\Psi\rangle$ reducido a la región \mathcal{A} , $\rho_{\mathcal{A}}$ es (ver Figura 2.11)

$$S(\mathcal{A}) = -\text{Tr}(\rho_{\mathcal{A}} \log \rho_{\mathcal{A}}) = \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} \text{area}(m_{\mathcal{A}}) . \quad (2.3.3)$$

Esta fórmula es simple y elegante. Relaciona una de las cantidades más importantes de teoría de la información, la EE, con el área de una superficie mínima en el bulk. Esta es la prescripción para cuando tenemos un estado y una región en donde haya simetría ante inversión temporal (regiones a tiempo fijo y estados estacionarios). En el caso más general en el que tenemos un estado no estacionario y regiones cuyo borde no yace sobre un plano espacial, debe aplicarse la prescripción de tomar, en lugar de la superficie mínima, la superficie de área extrema (estacionaria) [111]. $G_N^{(d+1)}$ es la constante de Newton en el bulk, definida como el coeficiente de la acción de Einstein-Hilbert de la teoría en el bulk, y es proporcional al inverso del número de grados de libertad internos de la CFT. Por ejemplo, para la dualidad AdS_3/CFT_2 se tiene la relación

$$G_N^{(3)} = \frac{3L}{2c}, \quad (2.3.4)$$

donde c es la carga central de la CFT_2 que vive en el borde. Esta relación fue descubierta mucho antes que la holografía [112], dado que el grupo infinito conforme en una CFT_2 es el grupo infinito de simetrías asintóticas en AdS_3 , y el álgebra de Virasoro, el álgebra clásica de estas simetrías asintóticas. El vacío en una CFT corresponde con la geometría del bulk que describe un espacio de AdS puro. En una CFT de dimensión $d = 2$, un cálculo directo del área de la superficie de área mínima (que en este caso se reduce a la longitud de una geodésica) a tiempo $t = 0$ en AdS_3 y cuyos bordes están en los extremos de un intervalo a tiempo $t = 0$ en M_2 , nos da, usando (2.3.3) y (2.3.4), el conocido resultado (2.2.76) que obtuvimos en la Sección 2.2.5. En general, un cálculo para una superficie mínima con borde sobre una esfera en M_d nos dará una entropía de entrelazado de la forma (2.2.80). Por ser todas las geometrías asintóticamente AdS , el área de $m_{\mathcal{A}}$ se hace infinita si la extendemos hacia el borde M_d de AdS. En este caso, esta área en el bulk se calcula hasta un valor cutoff de la coordenada holográfica $z = z_0$. La divergencia principal del área de $m_{\mathcal{A}}$ es proporcional al área de ∂A , como corresponde a una entropía de entrelazado $S(\mathcal{A})$ en QFT.

La fórmula (2.3.3) tiene una similitud total con la de Bekestein-Hawking para la entropía de un agujero negro, y puede verse como una extensión de esta cuando la superficie $m_{\mathcal{A}}$ no necesariamente envuelve al horizonte de eventos de un agujero negro, sino que se sostiene en la “pantalla holográfica” M_d en el infinito de AdS_{d+1} , pudiendo pasar cerca de un agujero negro, si este estuviera presente. De hecho, este ejemplo muestra muy bien algunas de las propiedades de esta prescripción. El dual de un estado térmico en la teoría del borde es el de una geometría asintóticamente AdS que describe a un agujero negro de la misma temperatura. Si calculamos las áreas mínimas en el caso de AdS_3/CFT_2 en esta geometría con agujero negro, para las superficies en el bulk con borde sobre los extremos de un intervalo, obtendremos la fórmula (2.2.77).

Otro chequeo de (2.3.3) es que para los estados puros se tiene que $S(\mathcal{A}) = S(\bar{\mathcal{A}})$,

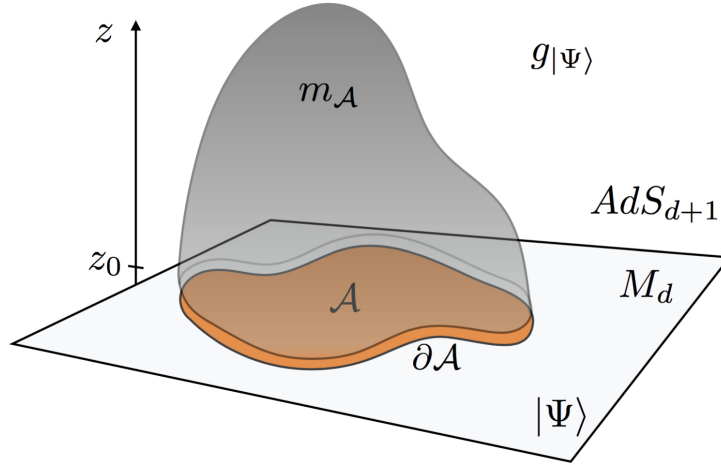


Figura 2.11: Prescripción holográfica de Ryu y Takayanagi para calcular la entropía de entrelazado $S(\mathcal{A})$ de una región \mathcal{A} a tiempo $t = 0$ en M_d . $S(\mathcal{A})$ viene dada por el área de la superficie de área mínima $m_{\mathcal{A}}$ en el bulk sostenida en el borde $\partial\mathcal{A}$ de \mathcal{A} , $S(\mathcal{A}) = (4G_N^{(d+1)})^{-1} \text{area}(m_{\mathcal{A}})$. La métrica $g|_{\Psi}$ asintóticamente AdS es dual al estado $|\Psi\rangle$ en la teoría del borde M_d . Por la geometría de AdS cerca del borde, el área de $m_{\mathcal{A}}$ se hace infinita si la extendemos hacia el borde M_d de AdS , por lo que la calculamos hasta un valor cutoff de la coordenada holográfica $z = z_0$. La divergencia principal del área de $m_{\mathcal{A}}$ es proporcional al área de $\partial\mathcal{A}$, como corresponde a una entropía de entrelazado $S(\mathcal{A})$ en QFT.

donde $\bar{\mathcal{A}}$ es la región complementaria de \mathcal{A} . Esto resulta de (2.3.3) si en la geometría del bulk no hay ningún “hueco”. Si el estado global no es puro esto no es necesariamente así. Estos casos requieren complementar la receta (2.3.3) con el requisito de tomar, de todas las superficies extremas $m_{\mathcal{A}}$ sostenidas en $\partial\mathcal{A}$, aquella que es holónoma con \mathcal{A} , o sea, que exista un dominio en el bulk que tenga como borde la unión de $m_{\mathcal{A}}$ y \mathcal{A} . Este requisito extra sale naturalmente de la demostración de (2.3.3) a partir de la entrada principal del diccionario holográfico: la igualdad de las funciones de partición [88]. El dual holográfico de $S(\mathcal{A}) \neq S(\bar{\mathcal{A}})$ cuando el estado global no es puro puede verse en el ejemplo del estado térmico, cuya geometría dual del bulk tiene un agujero negro que provoca que la superficie mínima $m_{\mathcal{A}}$ holónoma con \mathcal{A} no sea la misma que la superficie mínima $m_{\bar{\mathcal{A}}}$ holónoma con $\bar{\mathcal{A}}$, ver Figura 2.12. Notemos también de la Figura 2.12 que cuando \mathcal{A} es todo el espacio M_d , la entropía de entrelazado es la entropía térmica y coincide con la entropía de agujero negro, pues $m_{\mathcal{A}}$ es la superficie que envuelve el horizonte de eventos.

Otra consecuencia importante de la fórmula holográfica (2.3.3) para la EE es que con esta se puede demostrar muy fácilmente la subaditividad fuerte (SSA) de la entropía de von Neumann, desigualdad (2.1.20) [113]. Holográficamente, la SSA es consecuencia de tener superficies mínimas. La demostración es muy simple, y puede verificarse de la Figura 2.13.

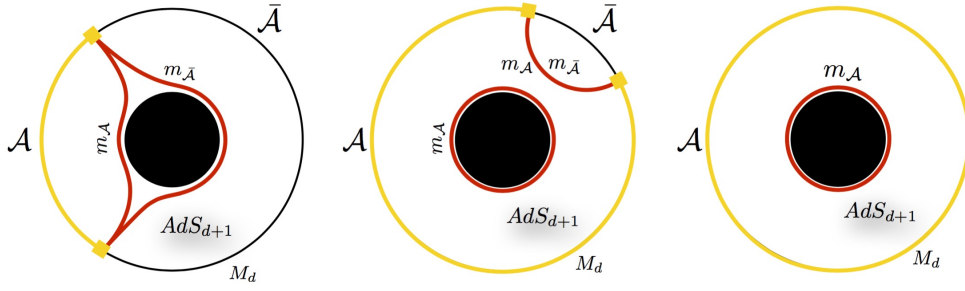


Figura 2.12: Geometría asintóticamente AdS con agujero negro. En estos casos las superficies mínimas m_A y $m_{\bar{A}}$, holónomas con \mathcal{A} y $\bar{\mathcal{A}}$ respectivamente, no son iguales, con lo cual $S(\mathcal{A}) \propto \text{area}(m_A) \neq \text{area}(m_{\bar{A}}) \propto S(\bar{\mathcal{A}})$. La imagen de la izquierda muestra un cuadro típico de esto. La imagen del centro muestra una transición que ocurre cuando el tamaño de la región \mathcal{A} es del orden del inverso de la temperatura. A partir de cierto punto en que la región \mathcal{A} se hace muy grande, la superficie de área mínima m_A tiene dos componentes, una que envuelve al agujero negro, y otra que termina en $\partial\mathcal{A}$, que coincide con $m_{\bar{A}}$. La imagen derecha muestra el caso en que \mathcal{A} es todo el espacio, en cuyo caso m_A es el horizonte de eventos del agujero negro, y la entropía térmica de la teoría del borde es la entropía de agujero negro en el bulk.

Este proceso de cortado y pegado de superficies sirve para demostrar la SSA y otro conjunto infinito de desigualdades que involucran a la entropía de entrelazado, y que no son ciertas en general [114]. De aquí vemos que solo un subconjunto de estados cuánticos de la QFT de M_d se representa como estados de geometría clásica en el bulk. Un ejemplo típico de esto es que holográficamente la cantidad $I_3(A, B, C) = I(A, B) + I(A, C) - I(A, BC) \leq 0$, (con $I(A, B)$ la información mutua) es siempre negativa, lo cual no es cierto en general. La demostración holográfica general de la SSA cuando las regiones no vienen determinadas a tiempo fijo, o los estados no son estacionarios, es más complicada, pues ya no tenemos superficies mínimas, sino extremas. En este caso se necesita la validez de la condición de energía nula (NEC) en el bulk, véase [115].

La fórmula (2.3.3) tiene innumerables aplicaciones teóricas y ha marcado un antes y un después en holografía. Es responsable de gran parte del interés de la comunidad en estudiar la entropía de entrelazado, y otras cantidades de la Teoría de la Información. Uno espera que muchas de las respuestas para establecer en más detalle la dualidad holográfica deben buscarse en el lenguaje de la Teoría de la Información. Por ejemplo, con la información del estado en la región \mathcal{A} , qué región del bulk puedo determinar (o cual es la “imagen” holográfica en el bulk que puede producir la región del borde \mathcal{A}). La respuesta a esta pregunta, al menos en el límite de N grande, es la región W_{EE} del bulk comprendida entre \mathcal{A} y m_A , llamada cuña de entrelazado. El dual a la matriz densidad ρ_A de la teoría del borde, es la matriz densidad $\rho_{W_{EE}}$ en el bulk. Otras cantidades como la entropía relativa no tienen un dual muy simple, excepto en el caso de esferas [39, 116]. Muchas propiedades o desigualdades de la Teoría de la Información tienen una representación o una implicación gravitatoria holográfica. Por ejemplo, que la resta de los Hamiltonianos modulares $H_A - H_B$ de A y B , con $B \subset A$ sea un operador positivo,

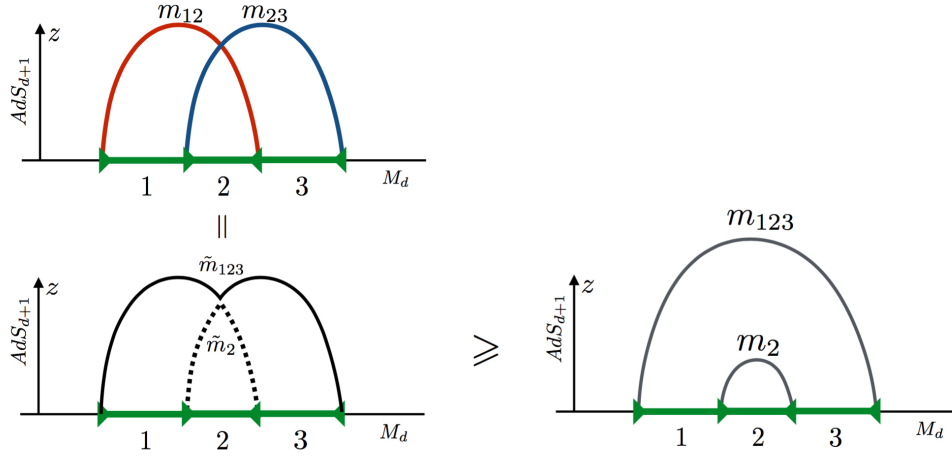


Figura 2.13: Demostración holográfica de la SSA: $S(12) + S(23) \geq S(2) + S(123) \Leftrightarrow \text{area}(m_{12}) + \text{area}(m_{23}) \geq \text{area}(m_2) + \text{area}(m_{123})$. De las imágenes de la izquierda podemos ver que la suma de la áreas de las superficies mínimas m_{12} y m_{23} es igual a la suma de las áreas de las superficies \tilde{m}_2 y \tilde{m}_{123} : $\text{area}(m_{12}) + \text{area}(m_{23}) = \text{area}(\tilde{m}_2) + \text{area}(\tilde{m}_{123}) \geq \text{area}(m_2) + \text{area}(m_{123})$. Esta última desigualdad debido a que m_2 y m_{123} son las superficies de área mínima con bordes sobre las regiones 2 y 123 respectivamente.

implica que las superficies de Ryu-Takayanagi están anidadas: toda geometría solución de las ecuaciones de Einstein en el bulk debe ser tal que m_A encierre a m_B si $B \subset A$ [37]. Esta propiedad de anidado de las m_A es la base de la demostración holográfica de la condición cuántica de energía nula (QNEC, por sus siglas en inglés) [117]. A partir de suponer la validez de la fórmula de Ryu-Takayanagi (2.3.3), y de la “primera ley” $\delta S = \delta \langle H \rangle$, se puede demostrar que a los estados que son pequeñas desviaciones del vacío, le corresponden geometrías duales cuya geometría viene determinada por las ecuaciones de Einstein linealizadas alrededor de AdS (que es la geometría dual del vacío en el borde) [63]. Con esto, (2.3.3) implica las ecuaciones de Einstein linealizadas alrededor de AdS.

Capítulo 3

Irreversibilidad en Teoría de Campos

La idea central del Grupo de Renormalización (GR) es que el cambio en la escala en una Teoría de Campos puede ser descrito por un cambio en los parámetros del Hamiltoniano que describe los grados de libertad relevantes a dicha escala. Esto determina un flujo o trayectoria en el espacio de acoplamientos, comenzando en el ultravioleta (altas energías o distancias pequeñas) (UV) y terminando en el infrarrojo (bajas energías o distancias grandes) (IR).

En los puntos fijos la física deja de cambiar con los subsiguientes cambios de escala, siendo estos los extremos de la trayectoria del flujo del GR. En teoría de campos podemos decir (aunque no está totalmente demostrado) que las teorías con invariancia de escala también son invariantes ante todo el grupo conforme. Los puntos fijos se corresponden con teorías de campos con simetría conforme (CFT). En esta Tesis se discutirán los flujos del grupo de renormalización para teorías con invariancia relativista en d dimensiones espacio-temporales, y donde los puntos fijos del grupo de renormalización son teorías conformes.

Es conocido desde hace tiempo que el GR es irreversible en dos dimensiones espacio-temporales. Este resultado, conocido como Teorema c y demostrado por Zamolodchikov en 1986 [44], dice que la carga central o anomalía conforme c decrece entre el UV y el IR. Si interpretamos el valor de la carga central c como una medida de los grados de libertad de la CFT¹, el teorema c de Zamolodchikov realiza la idea intuitiva (pero no exactamente correcta) de que este número de grados de libertad debe decrecer a distancias grandes o a bajas energías, ya que los “grados de libertad masivos” no contribuyen a las funciones de correlación, o, en el esquema de Wilson, perdemos grados de libertad al integrar los modos de altas energías. El Teorema de Zamolodchikov

¹La cantidad de grados de libertad en una QFT es infinito, sin embargo, la carga central sirve como una medida de los grados de libertad de una CFT en $d = 2$ en comparación con otra CFT de referencia, por ejemplo, el escalar libre no masivo, que tiene carga central $c = 1$.

establece un orden en el espacio de las CFTs: Una CFT con carga central c no puede fluir a otra CFT en el IR con mayor carga central: el Grupo de Renormalización es irreversible en $d = 2$.

En cuatro dimensiones espacio-temporales, Cardy propuso que un coeficiente particular en la anomalía conforme (o anomalía de Weyl), el coeficiente A del término de Euler, debería decrecer ante flujos del grupo de renormalización, [45]. Recientemente en 2011, después de varios intentos en la comunidad, Komargodski y Schwimmer ofrecieron una prueba de este Teorema A [46]. Se cree que en dimensiones pares, el coeficiente A de Euler en la anomalía de Weyl de una CFT es un candidato correcto para expresar o demostrar los teoremas de irreversibilidad.

Para dimensiones impares la situación fue al comienzo poco clara, pues no hay anomalías conformes. Basado en investigaciones en teorías con dual holográfico, en [47] se propuso que en dimensiones impares el término constante en la entropía de entrelazado de una esfera podría ser un buen candidato a estar ordenado ante flujos GR. Esta conjetura, ahora conocida como Teorema F , fue establecida por Casini y Huerta en [41], extendiendo las ideas de una prueba similar que utiliza la entropía de entrelazado para dar una prueba alternativa del teorema c en $d = 2$ [40]. La propiedad crucial en esta prueba es la Subaditividad Fuerte de la entropía de entrelazado. Estudiando teorías supersimétricas, en [48] se conjeturó que el término constante en la energía libre F de la CFT en $d = 3$, calculada sobre la esfera Euclídea S^3 , era monótona ante el GR, por eso el nombre de Teorema F . De hecho esta cantidad es la misma que el término constante en la entropía de entrelazado de una esfera [49], y las prouestas de [47] y [48] coinciden.

La EE de una esfera tiene la estructura de divergencias específica (2.2.80) que mostramos al final de la Sección 2.2.5. En dimensión impar, el término constante es proporcional a F , y en dimensión par el coeficiente del término logarítmico es proporcional a c en $d = 2$, a A en $d = 4$ y en general al coeficiente de Euler A en la anomalía de traza de la CFT.

La única prueba que existe del Teorema- F en $d = 3$ es la prueba entrópica de Casini y Huerta [41]². En $d = 2$ existen actualmente varias pruebas, algunas basadas en las propiedades de las funciones de correlación [44, 118] y otras basadas en propiedades de la entropía de entrelazado [40] o de la entropía relativa [32]. Esta última demostración es parte del contenido de esta Tesis, y se discutirá hacia el final del Capítulo 4. En $d = 4$, y hasta el momento de los últimos trabajos desarrollados para esta Tesis, solo existía la prueba del Teorema A de [46].

El Capítulo está organizado así. Comenzaremos estableciendo brevemente el cuadro

²Una dificultad importante en probar la irreversibilidad en dimensión impar por los método habituales (propiedades de las fuciones de correlación) es que la cantidad F , en contraste con las anomalías, es una cantidad muy no local que no aparece en las funciones de correlación.

general de los teoremas de irreversibilidad del grupo de renormalización. Seguidamente discutiremos las pruebas no entrópicas, comenzando con la demostración del Teorema c de Zamolodchikov (1986) [44] y un paréntesis en la propiedad de positividad de reflexión, seguida por la demostración del mismo teorema con las ideas del truco del dilatón de Komargodski y Schwimmer, y continuando con la demostración del Teorema A en $d = 4$ (2011) [46, 118]. Después discutiremos las demostraciones entrópicas de Casini y Huerta de los Teoremas c y F (2004), (2012) [3, 30, 41].

3.1. Esquema general de los Teoremas de Irreversibilidad

El grupo de renormalización ha sido sumamente útil para abordar y simplificar problemas que involucran un número grande de grados de libertad en interacción, y es un tema basto en el que entra todo tipo de física, desde todos los sistemas o modelos que describen los fenómenos en un material, hasta teorías de campos en el continuo con invariancia relativista. Solo comentaremos brevemente estas ideas para el caso de teorías de campos (con invariancia de Lorentz) y cuando la descripción de altas energías (o ultravioleta) viene dada por una teoría conforme, y la descripción de bajas energías (o infrarroja) viene dada por otra teoría conforme.

En la visión Lagrangiana (integral funcional) o en la visión Wilsoniana de las teorías de campos, un flujo del grupo de renormalización se piensa de la siguiente forma. Se tiene inicialmente una CFT descrita por la acción S_0 , y se elige del contenido operatorial de esta un operador \mathcal{O} de dimensión Δ para introducir una nueva interacción en el Lagrangiano, y con esto una nueva teoría con acción S_1

$$S_1 = S_0 + \int d^d x g \mathcal{O}(x). \quad (3.1.1)$$

La teoría S_1 de (4.4.3) tiene una escala marcada por la constante de acoplamiento g , que tiene unidades $[g] = d - \Delta$, por lo que no es una CFT, y la física que describe a distintas escalas de energía va a ser muy diferente. En S_1 tendremos una escala a partir de la cual los correladores tienen comportamientos muy distintos, en contraste con una CFT, en la que los correladores de campos locales decaen siempre como potencias inversas fijas de las distancias. En una CFT los operadores pueden clasificarse en relevantes, irrelevantes o marginales, en dependencia de si su dimensión conforme es menor, mayor, o igual que la dimensión d del espacio-tiempo: $\Delta < d$ relevante, $\Delta = d$ marginal, y $\Delta > d$ irrelevante.

En este esquema las constantes de acoplamiento $g_i(\mu)$ en el Lagrangiano de una teoría que no es conforme cambian con la escala μ , y en el espacio de las $g_i(\mu)$ ocurre

un flujo parametrizado por μ . De forma más precisa, si la teoría está dada a la escala de energía Λ por un Lagrangiano con constantes de acoplamiento $g_i = g_i(\Lambda)$, y queremos calcular las funciones de correlación a una distancia no menor que μ^{-1} , donde μ es una escala de energía menor que Λ , $\mu < \Lambda$, podemos calcular estas con un Lagrangiano del mismo tipo, pero donde las constantes de acoplamiento tienen unos nuevos valores $g'_i = g_i(\mu)$. Si hacemos

$$t = -\log(\mu/\Lambda) , \quad (3.1.2)$$

el parámetro t será el tiempo que parametriza estos flujos de g_i . $t = 0$ corresponde con el UV, y $t = \infty$ corresponde con el IR. Las propiedades de este flujo están codificadas en las funciones β_i asociadas a cada constante de acoplamiento

$$\beta_i = -\frac{dg_i(t)}{dt} . \quad (3.1.3)$$

Los valores de estas pueden calcularse, por ejemplo, perturbativamente alrededor de un punto fijo libre o conforme, o exactamente en algunos casos, por ejemplo, en teorías supersimétricas. La aproximación a nivel árbol para β viene dada por

$$\beta(t) \sim (\Delta - d)g(t) , \quad (3.1.4)$$

por lo que, a nivel clásico, y sin tomar en cuenta las correcciones cuánticas, $\Delta < d$ implica que los valores de la $g(t)$ correspondientes crecerán hacia el IR, al aumentar t , cambiando sustancialmente la CFT en el UV, de aquí el nombre de relevante.

Las interacciones en la teoría definirán una trayectoria $g_i(t)$ en el espacio de las constantes de acoplamiento. Para las teorías conformes, sucede que las $g_i(t) = g_i^*$ son constantes específicas que no cambian con la escala. En el espacio de las g_i , las CFT son puntos específicos aislados (aunque podemos tener una variedad (en el sentido matemático) de dimensión mayor que cero, de puntos fijos en teorías supersimétricas), y cualquier otra teoría es una trayectoria, ver Figura 3.1.

La irreversibilidad del grupo de renormalización, que es el contenido del Teorema c de Zamolodchikov en $d = 2$ y de sus equivalentes en dimensiones mayores, es que este espacio de trayectorias $g_i(t)$ tiene cierta estructura. Específicamente, la irreversibilidad del GR dice que no podemos tener trayectorias cerradas. Si ocurre que una teoría fluye, como en la Figura 3.1, desde una teoría CFT_A hasta una CFT_C , no existe ninguna otra teoría, que fluya desde CFT_C hasta CFT_A .

En el caso de $d = 2$, la forma de expresar esta irreversibilidad es a través de una función $c(\mu) = c(g_i(\mu))$ monótona con la escala de energía μ o el parámetro t , y que en los puntos fijos es igual a la carga central de la CFT. La forma específica que tiene

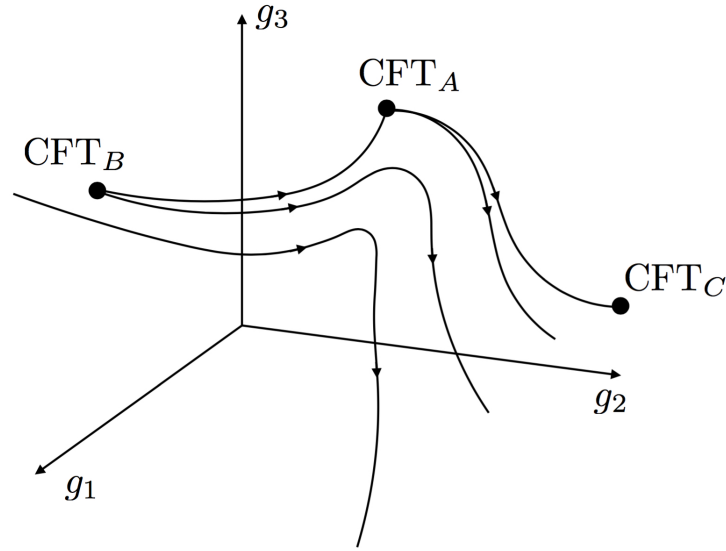


Figura 3.1: Espacio de las constantes de acoplamiento g_1, g_2, g_3 en una familia de Lagrangianos que definen distintas teorías. Las teorías de campos son trayectorias y las teorías conformes son puntos específicos.

esta función c es

$$c(\mu) = c_{IR} + 6\pi^2 \int_{1/\mu}^{\infty} dx x^3 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle , \quad (3.1.5)$$

donde Θ es la traza del tensor de energía-momentos de la teoría que conecta a las CFT's, y

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} c(\mu) = c_{IR} \quad \text{y} \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} c(\mu) = c_{UV} , \quad (3.1.6)$$

siendo c_{IR} la carga central de la CFT al final del flujo del GR, y c_{UV} la carga central de la CFT al comienzo del flujo del GR. La diferencia entre estas cargas centrales es la cantidad positiva

$$\Delta c = c_{UV} - c_{IR} = 6\pi^2 \int_0^{\infty} dx x^3 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle \geq 0 .$$

Si existe un flujo que conecta a CFT_{UV} y CFT_{IR} , necesariamente

$$c_{UV} \geq c_{IR} . \quad (3.1.7)$$

Si una CFT es perturbada, solo puede fluir a una CFT con carga central menor, y no igual, ya que $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = 0$ implica que $\Theta(x) = 0$ como operador.

Los teoremas de irreversibilidad del GR son teoremas muy generales sobre la estructura global (no perturbativa) de toda teoría de campos. Para expresarlos, se necesitan cantidades definidas en toda teoría, como el tensor de energía-momentos, y como veremos, la entropía de entrelazado del vacío. La irreversibilidad se expresa mostrando la existencia de una cantidad adimensional y monótona con la escala de energía que en

los puntos fijos sea igual a propiedades intrínsecas de las CFT's. En el caso de $d = 2$, la cantidad intrínseca adecuada es la carga central c .

En el lenguaje de Wightman, donde una teoría de campos no se piensa como definida a través de un Lagrangiano y constantes de acoplamiento, sino directamente a través del conjunto de todas sus funciones de correlación $\mathcal{W}_{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización se manifiesta en las propiedades de las funciones de correlación de toda QFT ante dilataciones $x \mapsto \lambda x$. Esta propiedad podría enunciarse formalmente así. Si tenemos una QFT definida por el conjunto de funciones de correlación $\{\mathcal{W}_{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que definen una QFT, y esta QFT es tal que

$$\mathcal{W}_{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{W}_{(n)}^{\text{CFT}_1}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad (3.1.8)$$

y

$$\mathcal{W}_{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{(n)}^{\text{CFT}_2}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad (3.1.9)$$

o sea, a pequeñas distancias (UV) las funciones de correlación de la QFT tienen el comportamiento de las funciones de correlación de una CFT, que nombramos CFT_{UV} y a grandes distancias (IR) las funciones de correlación de la QFT tienen el comportamiento de las funciones de correlación de otra CFT, que nombramos CFT_{IR} , la irreversibilidad del grupo de renormalización nos dice que no existe entonces una QFT cuyo comportamiento límite en el UV e IR sean los contrarios a estos (que a distancias cortas se comporte como CFT_{IR} y a distancias grandes como CFT_{UV}).

3.2. Prueba de Zamolodchikov del Teorema c

La primera prueba del Teorema- c , dada por Zamolodchikov en [44], está basada en una propiedad especial de la función de correlación del tensor de energía-momentos $T_{\mu\nu}$, válida solamente en $d = 2$. Por este motivo no es generalizable a dimensiones mayores. Trabajamos directamente en coordenadas Euclídeas. En $d = 2$, usualmente se trabaja usando las coordenadas complejas (z, \bar{z}) , como en [44], pero creemos que la versión que presentamos en coordenadas reales es más transparente.

La forma general de $\langle T_{\mu\nu}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle$ en d dimensiones para toda teoría de campos (no necesariamente conforme) es:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(0) T_{\alpha\beta}(x) \rangle = & g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \frac{h_1(x)}{x^{2d}} + x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta \frac{h_2(x)}{x^{2d+4}} + (x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu}) \frac{h_3(x)}{x^{2d+2}} \\ & + (x_\alpha x_\mu g_{\beta\nu} + x_\alpha x_\nu g_{\mu\beta} + x_\mu x_\beta g_{\alpha\nu} + x_\nu x_\beta g_{\mu\alpha}) \frac{h_4(x)}{x^{2d+2}} \\ & + (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) \frac{h_5(x)}{x^{2d}}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

En el miembro derecho, x es el módulo (Euclídeo) de x_μ y $h_i(x)$ son funciones escalares adimensionales. La expresión (3.2.1) fue obtenida imponiendo sobre $\langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle$ las siguientes simetrías: covariancia ante rotaciones (covariancia ante Lorentz en espacio de Minkowski), invariancia de traslación, e invariancia ante los intercambios de índices $\mu \leftrightarrow \nu$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $(\mu\nu) \leftrightarrow (\alpha\beta)$.

Se encuentra una simplificación adicional en $d = 2$. Los coeficientes tensoriales de las h_i no son linealmente independiente en $d = 2$:

$$\begin{aligned} -2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \frac{2}{x^2}(x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu}) + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}) \\ - \frac{1}{x^2}(x_\alpha x_\mu g_{\beta\nu} + x_\alpha x_\nu g_{\mu\beta} + x_\mu x_\beta g_{\alpha\nu} + x_\nu x_\beta g_{\mu\alpha}) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Por este motivo podemos eliminar una de las h_i 's en $d = 2$. Este es el punto en donde la prueba de Zamolodchikov está anclada al caso de $d = 2$.

Eliminemos h_4 y sustituyamos $d = 2$ en (3.2.1)

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x) \rangle = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \frac{h_1(x)}{x^4} + x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta \frac{h_2(x)}{x^8} + (x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu}) \frac{h_3(x)}{x^6} \\ + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}) \frac{h_5(x)}{x^4}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Separemos $T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2}\Theta$ en una parte de espín cero $\frac{g_{\mu\nu}}{2}\Theta$ y una parte de espín dos $\hat{T}_{\mu\nu}$. Θ es la traza $T_{\mu\nu}$. Extraemos de (3.2.3) los correladores $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$, $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\Theta(x) \rangle = \langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$ y $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(0)\hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle$, y definimos las funciones adimensionales $H(x)$ y $G(x)$.

$$x^4 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle = 4h_1 + h_2 + 4h_3 + 4h_5 \equiv H. \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} x^4 \langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle &= 2g_{\mu\nu}h_1 + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}h_2 + 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}h_3 + g_{\mu\nu}h_3 + 2g_{\mu\nu}h_5 \\ &= g_{\mu\nu}(2h_1 + h_3 + 2h_5) + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}(h_2 + 2h_3). \end{aligned}$$

Tomando traza y teniendo en cuenta que $\hat{T}_\mu^\mu = 0$, obtenemos

$$0 = 2(2h_1 + h_3 + 2h_5) + (h_2 + 2h_3), \quad (3.2.5)$$

y con esto

$$x^4 \langle \Theta(0)\hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle = \left(\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \right) (h_2 + 2h_3) \equiv \left(\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \right) G. \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned}
x^4 \langle \hat{T}_{\mu\nu}(0) \hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle &= g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} h_1 + \frac{x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta}{x^2} h_2 + \frac{(x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu})}{x^2} h_3 \\
&\quad + (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) h_5 .
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Tomando traza ($\hat{T}_\mu^\mu = 0$)

$$\begin{aligned}
0 &= 2g_{\mu\nu} h_1 + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} h_2 + 2 \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} h_3 + g_{\mu\nu} h_3 + 2g_{\mu\nu} h_5 \\
&= g_{\mu\nu} (2h_1 + h_3 + 2h_5) + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} (h_2 + 2h_3) .
\end{aligned}$$

Por indenpendencia lineal, los paréntesis anteriores son cero por separado. Podemos elegir entonces poner (3.2.7) en función de h_2 y h_5 :

$$\begin{aligned}
x^4 \langle \hat{T}_{\mu\nu}(0) \hat{T}_{\alpha\beta}(x) \rangle &= g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{4} h_2 - h_5 \right) + \frac{x_\mu x_\nu x_\alpha x_\beta}{x^2} h_2 - \frac{1}{2} \frac{(x_\mu x_\nu g_{\alpha\beta} + x_\alpha x_\beta g_{\mu\nu})}{x^2} h_2 \\
&\quad + (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) h_5 .
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Usemos la conservación del tensor de energía-momento $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ en (3.2.3)

$$\begin{aligned}
0 = \langle T_{\mu\nu}(0) \partial^\beta T_{\alpha\beta}(x) \rangle &= T_1 (xh'_1 - 4h_1) + T_2 (-3h_2 + xh'_2) + h_3 (T_3 + 3T_1) \\
&\quad + (T_2 + T_1) (xh'_3 - 6h_3) + T_3 (xh'_5 - 4h_5) \\
&= T_1 (xh'_1 - 4h_1 - 3h_3 + xh'_3) \\
&\quad + T_2 (-3h_2 + xh'_2 + xh'_3 - 6h_3) \\
&\quad + T_3 (h_3 + xh'_5 - 4h_5) ,
\end{aligned}$$

donde $h'_i \equiv \frac{d}{dx} h_i(x)$ y T_1, T_2, T_3 son los siguientes tensores linealmente independientes

$$T_1 = \frac{g_{\mu\nu} x_\alpha}{x^6} ; \quad T_2 = \frac{x_\mu x_\nu x_\alpha}{x^8} ; \quad T_3 = \frac{g_{\mu\alpha} x_\nu + g_{\nu\alpha} x_\mu}{x^6} .$$

Por esta independencia tenemos el sistema

$$\begin{aligned}
xh'_1 - 4h_1 - 3h_3 + xh'_3 &= 0 \\
-3h_2 + xh'_2 + xh'_3 - 6h_3 &= 0 \\
h_3 + xh'_5 - 4h_5 &= 0 .
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Ponemos el sistema (3.2.9) en términos de h_2, h_5, H y G ($h_3 = G - h_2$ y $4h_1 = H - G - 4h_5 - 3h_2$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \dot{H} - \dot{h}_5 - \frac{1}{4} \dot{h}_2 - H + (G + 4h_5) &= 0 \\
\dot{G} + 3h_2 - 6G &= 0 \\
\dot{h}_5 + G - h_2 - 4h_5 &= 0 .
\end{aligned}$$

($\dot{H} = x \frac{d}{dx} H$, etc). De las últimas dos hacemos la combinación $G + 4h_5 = \frac{1}{3}\dot{G} + \dot{h}_5$, que sustituimos en el paréntesis de la primera ecuación:

$$-\left(\frac{1}{4}\dot{h}_2 - \frac{1}{4}\dot{H} + \frac{1}{3}\dot{G}\right) = H. \quad (3.2.10)$$

Definiendo

$$c = k \left(\frac{1}{4}h_2 - \frac{1}{4}H + \frac{1}{3}G \right) ; \quad k > 0 , \quad (3.2.11)$$

tenemos

$$\dot{c} = -kH. \quad (3.2.12)$$

Como $H = x^4 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$ (ver (3.2.4)) y por positividad de reflexión (que veremos en la próxima Sección)

$$\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle \geq 0 , \quad (3.2.13)$$

concluimos que

$$x \frac{d}{dx} c(x) \leq 0 .$$

La función $c(x)$ decrece con la escala de distancia x .

Hasta ahora hemos probado la monotonidad de la función $c(x)$ con x . Estudiemos los límites UV e IR de esta función para ver si corresponden con cantidades intrínsecas de los puntos fijos. Para ver esto usamos que en las CFTs de los puntos fijos se tiene que el coeficiente del término x^{-4} en la expansión del producto $T_{\mu\nu}(0)T_{\alpha\beta}(x)$ es proporcional a la carga central c . En los puntos fijos $\Theta = 0$, $H = G = 0$ y, de (3.2.10), h_2 es constante. De (3.2.1) tenemos que h_2 es proporcional a la carga central. En (3.2.11) elegimos k de forma que $c(x)$ iguale a la carga central en los puntos fijos.

Para dar una expresión explícita de la función $c(x)$ calibramos k con el flujo de un campo escalar masivo, del cual sabemos que $\Delta c = 1 : c_{UV} = 1 = c(x \rightarrow 0)$ y $c_{IR} = c(x \rightarrow \infty) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{c} = x \frac{dc}{dx} &= -k H = -k x^4 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle \\ \frac{dc}{dx} &= -k x^3 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle . \end{aligned}$$

Para el campo escalar

$$\begin{aligned} \Delta c = 1 &= -k \int_{-\infty}^0 dx x^3 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle \\ &= k \int_0^{\infty} dx x^3 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle = \frac{k}{2\pi} \underbrace{\int d^2x x^2 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle}_{(3\pi)^{-1} \text{ campo escalar}} \end{aligned}$$

y $k = 6\pi^2$. Se tiene entonces que para cualquier flujo del GR

$$\Delta c = c_{\text{UV}} - c_{\text{IR}} = 3\pi \int d^2x \, x^2 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle . \quad (3.2.14)$$

A partir de aquí podemos definir una función interpolante $c(x)$ cortando esta integral en algún punto intermedio x . Esto define la función $c(x)$ de Zamolodchikov. Hay otras (infinitas) funciones c que se pueden obtener usando la descomposición espectral $\rho(\mu)$ de $\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0) \rangle$ [119].

3.2.1. Relación con el flujo en el espacio de acoplamientos

Como c es una combinación de funciones definidas por correladores de $T_{\mu\nu}$, debe cumplir la ecuación de Callan-Symanzik sin el término de dimensión anómala, pues $T_{\mu\nu}$ tiene siempre dimensión d en d dimensiones

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} \right) c(g_i, \mu, x) = 0. \quad (3.2.15)$$

Aquí las constantes g_i las tomo adimensionales (en unidades de alguna escala de energía μ_0). Como $c(g_i, \mu, x)$ es adimensional, necesariamente depende de la combinación μx , $c(g_i, \mu, x) = c(g_i, \mu x)$, con lo cual

$$\mu \frac{\partial c(\mu x)}{\partial \mu} = x \frac{\partial c(\mu x)}{\partial x} = \dot{c} . \quad (3.2.16)$$

En esta igualdad, $\dot{c} = x \frac{dc}{dx}$ se toma para un valor fijo de las g_i y $\mu \frac{\partial c(\mu x)}{\partial \mu}$ para un valor fijo de la x . De (3.2.15) y (3.2.16) tenemos

$$\frac{d}{dt} c(g_i) \equiv -\beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} c(g_i, x_{\text{fija}}) = x \frac{d}{dx} c(g_i^{\text{fija}}, x) = \dot{c} \leq 0 . \quad (3.2.17)$$

La $c(g_i)$ que escribimos arriba en $\frac{d}{dt} c(g_i)$, es la $c(g_i, x)$ para una x fija, si se quiere, $c(g_i) = c(g_i, x = 1)$.

En un punto crítico $\{g_i^*\}$, la teoría es una CFT y $\Theta = 0$, lo que implica que $H = G = 0$ y $\dot{c} = 0$. Por (3.2.17), tenemos, en este caso, que $c(g_i)$ es estacionaria respecto a las transformaciones del grupo de renormalización.

Podemos resumir estos resultados así. El flujo del grupo de renormalización es un movimiento en el espacio de las g_i 's renormalizadas, con parámetro μ , y generado por

$$\frac{d}{dt} = -\beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} . \quad (3.2.18)$$

En dos dimensiones y para teorías de campos unitarias (positividad de reflexión) y

relativistas, existe una función $c(g)$ de las constantes de acoplamiento, positiva y que

1. Decrece monótonamente a lo largo del flujo del GR: $\frac{d}{dt}c(g) = -\beta_i(g)\frac{\partial}{\partial g_i}c(g) \leq 0$.
2. Es estacionaria en los puntos fijos $g_i = g_i^*$.

$$\beta(g^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial g_i}c(g) = 0. \quad (3.2.19)$$

3. En los puntos fijos iguala a la carga central de la CFT correspondiente.

$$c(g^*) = c. \quad (3.2.20)$$

Con esto podemos ver que el espacio de las constantes de acoplamiento tiene una estructura adicional: está foliado por superficies de $c(g)$ constantes que solo se pueden cruzar en una dirección.

Es útil aclarar que para demostrar la irreversibilidad del grupo de renormalización en d dimensiones, es suficiente mostrar la desigualdad $c_{UV} > c_{IR}$ entre las correspondientes cargas centrales de las CFTs en los extremos del flujo del GR. Esta es la llamada versión débil de los teoremas c , en donde no se provee una función interpolante, ni se especifican sus propiedades. Este será el caso de las demostraciones que forman parte del contenido original de esta Tesis: en $d = 2$ demostraremos la versión débil del Teorema c analizando las propiedades de la entropía relativa entre dos estados de vacíos, Sección 4.7, y en el Capítulo 7, demostraremos el Teorema A , principal resultado de esta Tesis, en su versión débil: $A_{UV} \geq A_{IR}$, a partir de la subaditividad fuerte de la entropía y la propiedad Markoviana del vacío.

3.2.2. Positividad de reflexión

En el enfoque axiomático, una QFT es toda una lista de funciones de n puntos $\{\mathcal{W}_{(n)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ (funciones de Wightman) que cumplen ciertas propiedades. Este es un pedido ambicioso, en el que para decir a qué QFT me estoy refiriendo, tengo que proveer una lista infinita de dependencias funcionales, posiblemente muy complicadas. El Lagrangiano es una forma de producir esta gran lista a través de la integral funcional sobre un peso dado por la exponencial de la acción correspondiente. No todas las QFT resultan de este procedimiento. Ejemplos de listas que pueden proveerse y que no resultan de un Lagrangiano podemos encontrarlos en las CFTs. Aquí todas las funciones de correlación pueden ser expresadas con la información de las funciones de correlación de dos y tres puntos, cuya estructura funcional está fijada por la invariancia conforme

salvo unas constantes: la dimensión conforme Δ_l de los operadores primarios y las constantes λ_{ijk} de las funciones de tres puntos. La consistencia de la misma teoría parece ser suficiente para seleccionar ciertos conjuntos de listas de estos números, como una tabla periodica de todas las CFTs. Este es un problema sumamente interesante y de gran interés actual, conocido con el nombre en inglés de Conformal Bootstrap[120]. Este programa se ocupa de descartar zonas de parámetros que no pueden ser aceptados para formar la lista de números que constituye una CFT consistente. Vease [97, 121] para una discusión moderna. En general, los requisitos sobre estas funciones de n -puntos (axiomas de Wightman [73], o axiomas de Osterwalder-Schrader [122], o, en el contexto algebraico, axiomas de Haag-Kastler [59]), que serán los correladores o funciones de Green de la teoría: $\langle \mathcal{T} \mathcal{O}_{i_1}(x_{i_1}) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_{i_n}) \rangle = \mathcal{W}_{(n)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, están diseñados para garantizar invariancia de Lorentz, estabilidad del vacío y una eventual construcción para que tales funciones de n -puntos resulten de operadores actuando en un espacio de Hilbert con un producto interno construido a partir de la información provista por estas mismas funciones (Teorema de Reconstrucción [73]). Para que esto sea así, un requisito básico es que tal producto interno sea definido positivo. Las QFT, pensadas como una lista de funciones de n -puntos, que tengan una forma tal que permitan la construcción de este producto interno positivo, se dicen unitarias. Existen otras teorías llamadas no unitarias para las que esto no vale, pero aún así pueden ser teorías *estadísticas* muy interesantes que describen problemas reales, como ciertos problemas de percolación. O sea, si la lista que define a la QFT es unitaria, entonces puedo representarme a esta como valores de espectación de operadores locales en el espacio de Minkowski actuando en un espacio de Hilbert con producto interno definido positivo. Esta condición sobre las funciones de n -puntos, cuando las variables x_{i_k} de las que depende son puntos en el espacio Euclídeo, y no puntos en el espacio de Minkowski, se llama Positividad de Reflexión.

A continuación veremos cómo se expresa esta condición y cómo se deriva de la positividad del producto interno del espacio del Hilbert sobre el que actúan operadores locales en el espacio de Minkowski. La función de dos puntos $W(x, y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ de un campo escalar Hermítico $\phi(x)$ en d dimensiones puede ser escrita (usando invariancia de Lorentz y traslación) como

$$W(x, y) = W(x - y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip(x-y)} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) , \quad (3.2.21)$$

con $px = p^0 x^0 - \sum_{i=1}^{d-1} p^i x^i$, $p^2 = (p^0)^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (p^i)^2$ y θ , la función escalón. La distribución $\rho(p^2)$ tiene soporte en $p^2 \geq 0$, por lo que, en la integral (3.2.21), solo se incluyen los momentos que pertenecen al cono de luz superior (esto es así por el axioma que garantiza la estabilidad del vacío, pidiendo que los autovalores del Hamiltoniano estén

en el cono de luz superior, que es una manera covariante de decir que la energía es siempre positiva para todo estado). De la positividad del producto interno en el espacio de Hilbert de un vector ($\mathcal{O} = \int d^d x f(x) \phi(x) |0\rangle$) consigo mismo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle 0 | \left(\int d^d x f(x) \phi(x) \right)^\dagger \left(\int d^d y f(y) \phi(y) \right) | 0 \rangle = \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W(x - y) \\ &= \int d^d p |\hat{f}(p)|^2 \theta(p^0) 2\pi \rho(p^2) , \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

extraemos la condición $\rho(p^2) \geq 0$ para la distribución $\rho(p^2)$. Esto debido a que, en (3.2.22), $f(x)$ es una función de prueba arbitraria ($\hat{f}(p)$ es su transformada de Fourier). La función $W(x)$ puede extenderse analíticamente a $x \rightarrow x - i\eta$.

$$W(x - i\eta) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip(x-i\eta)} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) , \quad (3.2.23)$$

siempre que $\eta \cdot p \geq 0$, o, lo que es equivalente, siempre que η pertenezca al cono de luz superior (pues $\rho(p^2) \theta(p^0)$ tiene soporte en el cono de luz superior). En particular, cuando $\eta = (x_E^0, 0, 0, \dots)$, con $(x_E^0 \geq 0)$, y $x = (0, x^1, x^2, \dots)$, se tiene el correlador Euclídeo W_E en tiempo Euclídeo positivo.

$$W(-ix_E^0, x^1, x^2, \dots) = W_E(x_E) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-p^0 x_E^0 + ip^i x^i} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) , \quad (3.2.24)$$

con $x_E = (x_E^0, x^1, x^2, \dots)$. Analicemos la cantidad $\int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W(x - \bar{y})$, con $\bar{y} = (-y^0, y^1, y^2, \dots)$ el reflejado en tiempo Euclídeo del vector Euclídeo y .

$$\begin{aligned} \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W_E(x - \bar{y}) &= \\ &= \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W_E(x^0 + y^0, x^1 - y^1, x^2 - y^2, \dots) \\ &= \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) \left(\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-p^0(x^0+y^0)+ip^i(x^i+y^i)} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) \right) \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (2\pi) \rho(p^2) \theta(p^0) \hat{f}_L(p)^* \hat{f}_L(p) , \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

con

$$\hat{f}_L(p) = \int f(x) e^{-p^0 x^0 + ip^i x^i} ,$$

Debido a esta transformada de Laplace, la última igualdad en (3.2.25) tiene sentido para $f(x)$ con soporte en la región $x^0 \geq 0$. Como $\rho(p^2) \geq 0$, de (3.2.25) se sigue que

$$\int d^d x d^d y f(x)^* f(\bar{y}) W_E(x - y) = \int d^d x d^d y f(x)^* f(y) W_E(x - \bar{y}) \geq 0 \quad (3.2.26)$$

para $f(x)$ con soporte en $x^0 \geq 0$. Esta es la condición de Positividad de Reflexión que debe satisfacer la función de dos puntos Euclídea para poder definir una teoría unitaria en el espacio de Minkowski:

$$W(x, \bar{y}) \geq 0 \quad , \quad \bar{y} = (-y^0, y^1, \dots, y^{d-1}) \quad . \quad (3.2.27)$$

A diferencia de lo que ocurre en (3.2.22), la primera integral en (3.2.26) no involucra puntos coincidentes (por la restricción en el soporte de $f(x)$), y podemos tomar $f(x)$ como una delta centrada en $x = (|x|/2, 0, 0, \dots)$, con lo cual

$$0 \leq W_E(x - \bar{x})|_{x=(|x|/2, 0, 0, \dots)} = W_E(|x|/2 - (-|x|/2), 0, 0, \dots) = W_E(|x|, 0, 0, \dots) = W_E(x) \quad . \quad (3.2.28)$$

En la última igualdad se utilizó la invariancia de traslación y de rotación. Por lo tanto

$$W_E(x) \geq 0 \quad , \quad (3.2.29)$$

para cualquier correlador Euclídeo de campos escalares, en particular, para (3.2.13). Esta es una forma equivalente de enunciar la Positividad de Reflexión. En la Sección 4.6.2 veremos cómo esta propiedad resulta desde el punto de vista gravitatorio en las teorías holográficas.

3.3. Prueba de Komargodski-Schwimmer del Teorema A

En [46] se presentó una demostración del Teorema-A en la que se usan varios trucos, en particular el llamado truco del dilatón, para hacer corresponder las anomalías en el IR y el UV. Estas técnicas también tienen una versión en dimensión dos, que conduce a una fórmula para la variación de la carga central c igual a la de Zamolodchikov. Para más detalles vease [118, 123]. La lógica usada puede separarse así.

Resumen de la idea de Komargodski-Schwimmer: truco del dilatón

1. Provocamos un flujo del GR perturbando una teoría conforme, que llamamos CFT_{UV} (de campos ϕ), con un operador relevante \mathcal{O} . Con esto la teoría $S[\phi] = S_{CFT_{UV}} + \int \lambda(\mu) \mathcal{O}$ no es más una CFT. Elegimos \mathcal{O} tal que S fluye a una CFT en el IR, que llamamos CFT_{IR} .
2. Podemos restaurar artificialmente la simetría conforme en S si acoplamos dicha

teoría a un cierto campo auxiliar τ de la siguiente forma:

$$\int d^d x \lambda(\mu) \mathcal{O}(x) \rightarrow \int d^d x \lambda(\mu e^{\tau(x)}) \mathcal{O}(x).$$

$\tau(x)$ se conoce como el campo dilatón. La acción $S[\phi, \tau]$, obtenida del acoplamiento de $S[\phi]$ con τ , es invariante de escala si el campo dilatón transforma como $\tau \rightarrow \tau + s$ cuando la energía es reescalada como $\mu \rightarrow \mu e^{-s}$. Para ser más explícitos es conveniente escribir el término de acoplamiento como

$$\int d^d x \lambda(\mu e^{\tau(x)}) \mathcal{O}(x) = \int d^d x \sqrt{g} \hat{\lambda}(\mu e^{\tau(x)}) \mu^{d-\Delta} \mathcal{O}(x),$$

donde $\hat{\lambda}$ es adimensional. Notemos que el dilatón aparece solo en el argumento de $\hat{\lambda}$. Ante un cambio de escala

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{2t} \eta_{\mu\nu}, \quad \mu \rightarrow \mu e^{-t}, \quad \tau \rightarrow \tau + t, \quad \mathcal{O}(x) \rightarrow e^{-t\Delta} \mathcal{O}(x),$$

el término de arriba es invariante. O sea, el dilatón se acopla con la teoría de acuerdo con la forma de la función $\beta(g_i)$ de esta, de tal manera que ante un cambio de escala, el dilatón cambia y la función β permanece igual a cero.

3. En el IR, el campo de dilatón y los campos ϕ se desacoplan, pues S fluye a una CFT_{IR} y no existe ninguna escala a la que τ pueda acoplarse. Tenemos entonces

$$S_{\text{efectiva}}^{IR}[\phi, \tau] = -\log \int D\phi_{UV} e^{-S[\phi, \tau]} = S_{CFT_{IR}} + S_{\text{dilatón}}[\tau],$$

donde ambas, $S_{CFT_{IR}}$ y $S_{\text{dilatón}}[\tau]$ son CFTs. Los términos en $S_{\text{dilatón}}[\tau]$ son generados por el flujo del GR de los campos materiales ϕ .

4. Como $S[\phi, \tau]$ es una CFT, en dimensión par puede tener anomalía de traza. En $d = 2$ tenemos la anomalía $T_\mu^\mu = -\frac{c}{24\pi} R$, proporcional a la carga central c de la teoría conforme $S[\phi, \tau]$. Una observación importante y el motivo para introducir el dilatón es que, como dijimos, si activamos la transformación $\tau \rightarrow \tau + s$, hacemos que la teoría $S[\phi, \tau]$ sea una CFT. Esto sirve para decir que a lo largo del flujo del GR la igualdad operatorial $T_\mu^\mu = 0$ vale salvo anomalías, con lo cual, la anomalía calculada con la teoría en el UV es igual a la anomalía calculada para la teoría en el IR. Tenemos

$$c(S[\phi, \tau]) = c(S_{CFT_{UV}}) = c(S_{CFT_{IR}}) + c(S_{\text{dilatón}}[\tau]),$$

o

$$c(S_{\text{dilatón}}[\tau]) = \Delta c = c_{UV} - c_{IR}. \quad (3.3.1)$$

Pordemos aislar la carga central de la acción efectiva del dilatón en el IR ya que esta se desacopla de $S_{CFT_{IR}}$. El dilatón se introduce para tener esta igualdad entre las anomalías.

5. Para buscar $c(S_{\text{dilatón}}[\tau])$, identificamos qué término en $S_{\text{dilatón}}[\tau]$ nos puede dar la anomalía. Para buscar dicho término, acoplamos nuestra teoría con una métrica no plana $g_{\mu\nu}$.
6. Después de identificado este, se investiga cómo este término es generado por los campos materiales ϕ y vemos si es definido positivo. Si este es el caso, tendremos entonces que $c_{UV} > c_{IR}$.

La implementación de estos pasos en $d = 2$ nos da una expresión para Δc igual a la de Zamolodchikov.

Identificación del término de la anomalía en la acción de τ en $d = 2$

La violación de la igualdad operatorial $T_\mu^\mu = 0$ cuando una CFT en $d = 2$ vive en un espacio curvo (activamos en la integral funcional una métrica no plana) es llamada anomalía de Weyl. Para una teoría de carga central c tenemos que

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{c}{24\pi} R, \quad (3.3.2)$$

donde R es el escalar de curvatura. Equivalente a (3.3.2) es

$$\delta_\sigma \log \mathcal{Z}_{CFT}[g_{\mu\nu}] = \frac{c}{24\pi} \int d^2x \sqrt{g} \sigma R \quad (3.3.3)$$

donde δ_σ es la variación ante reescaleos de la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}$.

Para dar cuenta de la diferencia de anomalía Δc en (3.3.1), tienen que haber términos en $S_{\text{dilatón}}(\tau, g_{\mu\nu})$ que rompan la invariancia de Weyl. Esto es, un término $\Gamma \subset S_{\text{dilatón}}(\tau, g_{\mu\nu})$ tal que

$$\delta_\sigma \Gamma[\tau, g_{\mu\nu}] = \frac{\Delta c}{24\pi} \int d^2x \sqrt{g} \sigma R.$$

Chequeemos que

$$\Gamma = \frac{\Delta c}{24\pi} \int \sqrt{g} (\tau R + (\partial\tau)^2) \quad (3.3.4)$$

hace lo que queremos. Recuértese que ante δ_σ

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \tau \rightarrow \tau + \sigma \quad .$$

$$\begin{aligned}
\delta_\sigma \Gamma = \Gamma_\sigma - \Gamma &= \frac{\Delta c}{24\pi} \int \sqrt{g} e^{2\sigma} \{ (\tau + \sigma) e^{-2\sigma} (R + 2\nabla^\mu \partial_\mu \sigma) \\
&\quad + g^{\mu\nu} e^{-2\sigma} (\partial_\mu \tau + \partial_\mu \sigma) (\partial_\mu \tau + \partial_\mu \sigma) \} - \frac{\Delta c}{24\pi} \int \sqrt{g} (\tau R + (\partial\tau)^2) \\
&= \frac{\Delta c}{24\pi} \int \sqrt{g} \sigma R + \frac{\Delta c}{24\pi} \int \sqrt{g} \{ 2\tau \nabla^\mu \partial_\mu \sigma + 2\sigma \nabla^\mu \partial_\mu \sigma + (\partial\sigma)^2 + 2\partial_\mu \tau \partial^\mu \sigma \} \\
&= \frac{\Delta c}{24\pi} \int \sqrt{g} \sigma R.
\end{aligned}$$

Tuvimos en cuenta la transformación de R y \sqrt{g} en $d = 2$, integramos por partes y nos quedamos a orden lineal en σ . En (3.3.4) es muy importante que el término $\int d^2x (\partial\tau)^2$ sobrevive al límite plano. Hemos identificado el término Γ en $S_{\text{dilatón}}$ cuyo coeficiente es Δc :

$$\Gamma = \frac{c_{UV} - c_{IR}}{24\pi} \int d^2x (\partial\tau)^2 \subset S_{\text{dilatón}}(\tau). \quad (3.3.5)$$

Los otros términos permitidos en $S_{\text{dilatón}}(\tau, g_{\mu\nu})$ son los invariantes de Weyl. Es muy fácil construir estos definiendo $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2\tau} g_{\mu\nu}$, que es $\text{diff} \times \text{Weyl}$ invariante. Hasta el orden de dos derivadas en τ , el único término invariante de Weyl que tenemos es $\int \sqrt{\hat{g}} R[\hat{g}_{\mu\nu}]$. En $d = 2$ este es un término topológico, por lo que es insensitivo ante cambios de τ , y un término $(\partial\tau)^2$ no podría resultar de aquí. Con esto estamos seguros que el coeficiente de $(\partial\tau)^2$ en toda $S_{\text{dilatón}}(\tau, g_{\mu\nu})$ es Δc .

Relación con la función c de Zamolodchikov

Veamos el coeficiente del término $(\partial\tau)^2$ en

$$S[\phi, \tau] = S_{CFT_{UV}} + \int \lambda(\mu e^{\tau(x)}) \mathcal{O}(x) .$$

Expandiendo en τ

$$\begin{aligned}
S[\phi, \tau] &= S_{CFT_{UV}} + \int \lambda(\mu) \mathcal{O}(x) + \int \beta(\lambda(\mu)) \mathcal{O}(x) \tau(x) + \dots \\
&= S_{CFT_{UV}} + \int \lambda(\mu) \mathcal{O}(x) + \int \Theta(x) \tau(x) + \dots
\end{aligned}$$

vemos, por la relación $\Theta = \beta(\lambda) \mathcal{O}$, que τ se acopla con la traza del tensor de energía momentos $\Theta = T_\mu^\mu$ de la teoría $S[\phi, \tau = 0]$. $\beta(\lambda)$ es la función beta de la constante de acoplamiento λ . Para obtener un término $(\partial\tau)^2$, necesitaremos algo que involucre a $\int d^2x \int d^2y \Theta(x) \Theta(y) \tau(x) \tau(y)$.

$$-\frac{\Delta c}{24\pi} \int d^2x (\partial\tau)^2 \subset \left\langle e^{-\int \tau \Theta + \dots} \right\rangle_{S[\phi, \tau=0]} = \dots + \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2y \langle \Theta(x) \Theta(y) \rangle \tau(x) \tau(y) + \dots$$

Concentrémonos en esta función de dos puntos y desarrollemos y alrededor de x

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta c}{24\pi} \int d^2x (\partial\tau)^2 &\subset \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2y \langle \Theta(x)\Theta(y) \rangle \tau(x)\tau(y) = \\
&= \dots + \frac{1}{4} \int d^2x \tau(x) \partial_\mu \partial_\nu \tau(x) \left(\int d^2y (y-x)^\mu (y-x)^\nu \langle \Theta(x)\Theta(y) \rangle \right) \\
&= \dots + \frac{1}{4} \int d^2x \tau(x) \partial_\mu \partial_\nu \tau(x) \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \int d^2y y^2 \langle \Theta(y)\Theta(0) \rangle \right) \\
&= \dots + \frac{1}{8} \left(\int d^2y y^2 \langle \Theta(y)\Theta(0) \rangle \right) \int d^2x \tau \square \tau
\end{aligned}$$

Usamos la independencia en x de la integral en y que se sigue de la invariancia ante traslación. Comparando los coeficientes de $(\partial\tau)^2$ obtenemos el resultado de Zamolodchikov

$$\Delta c = 3\pi \int d^2y y^2 \langle \Theta(y)\Theta(0) \rangle. \quad (3.3.6)$$

La Positividad de Reflexión ($\langle \Theta(y)\Theta(0) \rangle \geq 0$) y la convergencia de esta integral aseguran la positividad de $\Delta c = c_{UV} - c_{IR}$.

Aplicación a $d = 4$, Teorema A

La aplicación de la idea de introducir el dilatón para igualar las anomalías entre el UV y el IR en el caso de $d = 4$ es directa. La única diferencia es que ahora tenemos dos tipos de anomalías. La anomalía tipo B , proporcional al tensor de Weyl al cuadrado W^2 y la anomalía tipo A proporcional a la densidad de Euler E_4 in $d = 4$,

$$\Theta = AE_4 - cW^2. \quad (3.3.7)$$

La condición de igualdad entre las anomalías implica las dos relaciones

$$c(S_{\text{dilatón}}[\tau]) = \Delta c = c_{UV} - c_{IR} \quad (3.3.8)$$

$$A(S_{\text{dilatón}}[\tau]) = \Delta A = A_{UV} - A_{IR}. \quad (3.3.9)$$

Para la aplicación al GR solo nos interesa la igualdad entre las anomalías A , pues se conoce que c no está ordenada ante el GR en $d = 4$ (hay contraejemplos usando perturbaciones o usando resultados exactos en teorías supersimétricas). El número A es un número que caracteriza a una CFT en $d = 4$. Se introduce como uno de los coeficientes de la anomalía de traza del $T_{\mu\nu}$ por conveniencia, pero también puede encontrarse, por ejemplo, en la expresión de la función de 3 y 4 puntos de $T_{\mu\nu}$.

El Teorema A dice que si una QFT conecta una CFT_{UV} en el UV con otra CFT_{IR} en el IR entonces

$$A_{UV} > A_{IR}. \quad (3.3.10)$$

Para probar esto necesitamos encontrar en $S_{\text{dilatón}}[\tau]$ el término que reproduce la anomalía A . Fue el trabajo [124] encontrar dicho término. En el límite plano este es

$$\Gamma = 2(A_{UV} - A_{IR}) \int d^4x (2(\partial\tau)^2 \square\tau - (\partial\tau)^4). \quad (3.3.11)$$

Encontramos aquí el problema de que pueden existir en $S_{\text{dilatón}}[\tau]$ otros términos con derivada de orden cuatro que no sean anómalos y se mezclen con (3.3.11). Estos otros términos resultan del límite plano de todos los términos $\text{diff} \times \text{Weyl}$ invariantes, que se obtienen de todos los escalares que se pueden construir con la métrica $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2\tau(x)} g_{\mu\nu}$ ($\text{diff} \times \text{Weyl}$ invariante). Con cuatro derivadas tenemos tres términos con coeficientes adimensionales κ_i .

$$\int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left(\kappa_1 \hat{R}^2 + \kappa_2 \hat{R}_{\mu\nu}^2 + \kappa_3 \hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \right). \quad (3.3.12)$$

Excluimos aquí los topológicos (Pontryagin y $\hat{\square}\hat{R}$). Es conveniente pasar a la siguiente parametrización

$$\int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left(\kappa'_1 \hat{R}^2 + \kappa'_2 \hat{E}_4 + \kappa'_3 \hat{W}^2 \right),$$

donde

$$E_4 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2, \quad W^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{3}R^2.$$

El correspondiente a κ'_2 es en $d = 4$ el término topológico de Gauss-Bonnet, y si ponemos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\hat{W}^2 = 0$ por ser conformemente plano. El único término a considerar es entonces \hat{R}^2 , que en el límite plano se reduce a

$$\int d^4x \sqrt{\hat{g}} \hat{R}^2 \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = 36 \int d^4x (\square\tau - (\partial\tau)^2)^2. \quad (3.3.13)$$

Una forma de distinguir (3.3.11) de (3.3.13) es considerar cuatro inserciones de un campo τ que satisfaga $\square\tau = (\partial\tau)^2$. Esta idea es introducida en [118] usando el cambio de variables: $\Psi = 1 - e^{-\tau}$. Con este Ψ tenemos

$$\begin{aligned} & 2(A_{UV} - A_{IR}) \int d^4x (2(\partial\tau)^2 \square\tau - (\partial\tau)^4) \\ &= 2(A_{UV} - A_{IR}) \int d^4x \left(\frac{2(\partial\Psi)^2 \square\Psi}{(1-\Psi)^3} + \frac{(\partial\Psi)^4}{(1-\Psi)^4} \right) \\ &= \int d^4x (\square\tau - (\partial\tau)^2)^2 = \int d^4x \frac{(\square\Psi)^2}{(1-\Psi)^4}. \end{aligned}$$

Si insertamos cuatro campos $\Psi(k_i)$ con $p_i^2 = 0$ en $\langle \dots \rangle_{S[\phi, \tau=0]}$, estaremos seguros de seleccionar limpiamente el término cuyo coeficiente es ΔA . Nótese que ya no nos interesa rastrear con qué campos de $S[\phi]$ τ se va a acoplar, pues la desigualdad necesaria para establecer $A_{UV} \geq A_{IR}$ ya no vendrá de la Positividad de Reflexión como en el caso

de $d = 2$. En cambio, vendrá del teorema óptico sobre las amplitudes de scattering de $2 \rightarrow 2$ Ψ 's.

Consideremos la amplitud de scattering $\mathcal{A}(s, t, u)$ de $2 \rightarrow 2$, $p_i^2 = 0$, partículas $\Psi(p_i)$ con momentos iniciales p_1, p_2 y momentos finales p_3, p_4 .

$$\sum_i p_i = 0, \quad s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p_3)^2, \quad u = -(p_1 - p_4)^2.$$

Por conservación del momento $s + t + u = 0$, tenemos que $\mathcal{A}(s, t, u) = \mathcal{A}(s, t)$. Nos restringimos a los scattering en que $t = 0$. El scattering a momentos bajos $s \rightarrow 0$ está gobernado por la acción efectiva en el IR de Ψ y está dada por

$$\mathcal{A}(s) = \frac{4}{m^4} (A_{UV} - A_{IR}) s^2 + \mathcal{O}(s^{\Delta_{IR}-2}), \quad (3.3.14)$$

donde $\Delta_{IR} > 4$ es la dimensión conforme más pequeña irrelevante de los operadores en el IR y m es una escala de masa de la teoría. La amplitud de scattering está relacionada

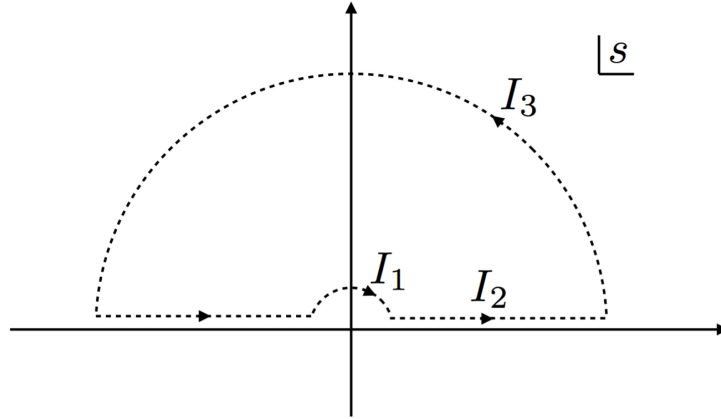


Figura 3.2: Contorno de integración en el plano complejo s .

con la matriz-S mediante

$$\langle f|S|i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \langle f|T|i \rangle.$$

En el caso de $2 \rightarrow 2$ scattering, $\langle f|T|i \rangle$ se identifica con $\mathcal{A}(s, t)$. Por analiticidad de la matriz-S tenemos

$$I_1 + 2I_2 + I_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\mathcal{A}(s)}{s^3} = 0, \quad (3.3.15)$$

donde el contorno de integración es por el semiplano superior, ver Figura 3.2. Elegimos la potencia s^3 en el denominador para aproximarnos a un polo simple y sacar el coeficiente $(A_{UV} - A_{IR})$ de (3.3.14) con la integral por I_1 . Al escribir $2I_2$ tuvimos en cuenta que la integral sobre el eje real negativo en (3.3.15) es igual a la integral en el eje real positivo por crossing symmetry. Teniendo en cuenta (3.3.14), y que la integral

por el contorno I_3 se anula, la parte real de (3.3.15) nos da que

$$(A_{UV} - A_{IR}) = \frac{m^4}{4\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\mathcal{A}(s)}{s^3} . \quad (3.3.16)$$

La unitariedad de la matriz S , ($SS^* = 1$) implica que $\text{Im}\mathcal{A}(s) \geq 0$ (Teorema óptico en el scattering de 2 a 2). De forma esquemática:

$$SS^* = 1 \Leftrightarrow (1 + i\mathcal{A})(1 - i\mathcal{A}^*) = 1 \Leftrightarrow i(\mathcal{A}^* - \mathcal{A}) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0 \Leftrightarrow 2\text{Im}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0.$$

El integrando en (3.3.16) tiene los siguiente comportamientos en el UV e IR, obtenidos por análisis dimensional

$$\text{Im}\mathcal{A}(s) \sim s^{2-\epsilon_{UV}} , \quad s \rightarrow \infty ; \quad \epsilon_{UV} = \min_{\Delta_i \text{ relevante}} (4 - \Delta_i) > 0 , \quad (3.3.17)$$

$$\text{Im}\mathcal{A}(s) \sim s^{2+\epsilon_{IR}} , \quad s \rightarrow 0 ; \quad \epsilon_{IR} = \min_{\Delta_i \text{ irrelevante}} (\Delta_i - 4) > 0 . \quad (3.3.18)$$

Estos límites justifican la convergencia de la integral (3.3.16) en $s = 0$ y $s \rightarrow \infty$, y la anulación de la integral por el contorno I_3 . Una función A interpolante entre las cargas centrales A_{UV} y A_{IR} se obtiene cortando la integral (3.3.16) en alguna escala intermedia μ .

3.4. Prueba de Casini-Huerta de los Teoremas c y F

3.4.1. Teorema c entrópico

En [3] se demostró que la irreversibilidad del GR en dimensión $d = 2$ es una consecuencia de las propiedades de la entropía de entrelazado, en particular, la Subaditividad Fuerte (SSA) (2.1.21). Esta desigualdad bien combinada con otros elementos claves de la teoría, como la invariancia de Lorentz y la evolución unitaria y causal, implica que la entropía de entrelazado del vacío de cualquier QFT reducido a un intervalo de longitud r tiene un comportamiento monótono específico. A partir de aquí se puede definir una función *entrópica* c , que interpola entre las cargas centrales de los puntos fijos UV e IR. La demostración en dimensión $d = 2$ es como sigue.

Consideremos el vacío de una QFT en $d = 2$ reducido a una región espacial dada por un intervalo de longitud l (solo tenemos una dimensión espacial), y sea $S(l)$ su entropía de entrelazado. Debemos decir que el estado de vacío está reducido al álgebra de operadores localizados en ese intervalo. Como el vacío es invariante de Poincaré, la entropía $S(l)$ solo depende de la longitud propia de ese intervalo. Para ver esto notemos que ante traslaciones y boosts el vacío queda invariante, y el álgebra de operadores del

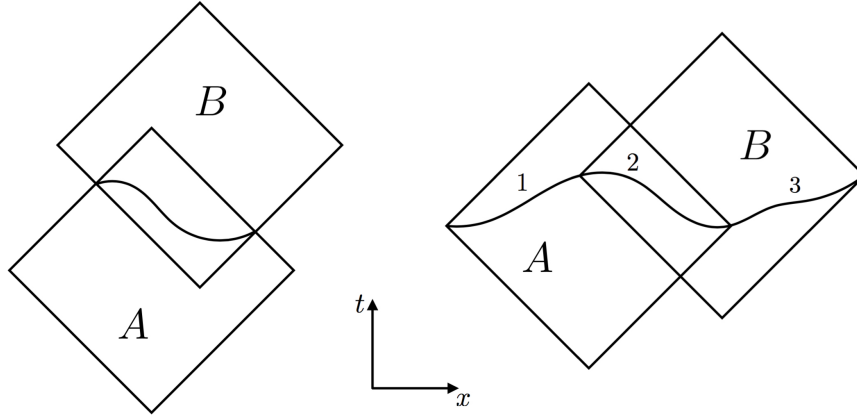


Figura 3.3: Izquierda: Para las subálgebras asociadas con las regiones causalmente completas A y B , la SSA no se cumple en general pues no existe ninguna superficie de Cauchy común a ambas. Derecha: disposición correcta de las regiones A y B para poder aplicar la SSA. A y B comparten una superficie de Cauchy común, compuesta de las superficies 1, 2 y 3, cuyas álgebras de operadores asociadas conmutan entre si, por estar 1, 2 y 3 a distancia espacial entre si.

intervalo (y su desarrollo causal) se mapea unitariamente en el álgebra de operadores de la región transformada. El ingrediente relativista tiene el gran poder de permitirnos identificar la entropía de entrelazado de un estado reducido a un intervalo boostado con uno no boostado.

Es pertinente notar que la SSA: $S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) \geq S(\rho_2) + S(\rho_{123})$, se cumple en un espacio de Hilbert de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$. Esto implica que las subálgebras correspondiente a los espacios \mathcal{H}_i deben conmutar entre si. Si las subálgebras a las que se va aplicar la SSA son subálgebras asociadas a regiones causalmente completas en el espacio de Minkowski, debemos garantizar que estas subálgebras conmuten entre si. Este es el caso si las regiones 1, 2 y 3 son los completamientos causales de porciones 1, 2 y 3 de una misma superficie de Cauchy, dado que los operadores locales espacialmente separados conmutan entre si, ver Figura 3.3. Al escribir la SSA en la forma (2.1.21)

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cap B) + S(A \cup B) , \quad (3.4.1)$$

y tomar las subálgebras A y B como las correspondiente a regiones causalmente completas en Minkowski, debemos asegurarnos de que $A = 1 \cup 2$ y $B = 2 \cup 3$ con 1, 2 y 3 subálgebras que conmutan entre si, lo cual se garantiza cuando estas están asociadas a los completamientos causales de porciones 1, 2 y 3 de una misma superficie de Cauchy.

Aplicamos (3.4.1) a las entropías del vacío reducido a los intervalos boostados A y B , dispuestos como en la Figura 3.4. Esta disposición de las regiones es un caso límite en el que la superficie de Cauchy común a A y B tiene las porciones 1 y 3 sobre intervalos nulos.

Hecha esta elección, veamos quiénes son las entropías $S(A \cap B)$ y $S(A \cup B)$. Debemos

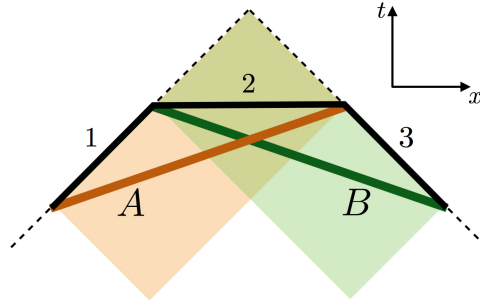


Figura 3.4: Diagrama espacio-temporal de Minkowski en $d = 2$. La dirección temporal es la vertical y la espacial la horizontal. Las líneas discontinuas a 45 grados son rayos de luz que forman un cono. Los extremos de los intervalos boosteados A y B , están sobre ese cono. Se destacan los correspondientes completamientos causales de los intervalos, regiones dónde se localizan los operadores de las álgebras asociadas. La superficie de Cauchy común a A y B , $1 \cup 2 \cup 3$, tiene las porciones 1 y 3 sobre intervalos nulos.

pensar $A \cap B$ y $A \cup B$ como álgebras, que es el sentido que debe asignársele a (3.4.1). Como se hizo notar en la Sección 2, el álgebra de operadores de una región puede pensarse como el álgebra de todos los operadores localizados en el desarrollo causal de esa región, que es la misma álgebra que la de los operadores localizados en cualesquiera de las superficies de Cauchy que dan lugar al mismo desarrollo causal, dado que tenemos ecuaciones de movimiento causales que llevan el álgebra de una superficie de Cauchy a otra (dentro del mismo desarrollo causal) de forma unitaria. Con esto en mente podemos identificar que el álgebra $A \cap B$ es la de los operadores localizados en la intersección de los desarrollos causales de A y B (sugeridas en la Figura 3.4). De forma similar, el álgebra $A \cup B$ es la generada por todos los operadores en A y B ; estos operadores se localizan en un diamante grande que incluye a A y B , y representado en la Figura 3.5.

Debemos conocer también la relación entre las longitudes propias de los intervalos A , B , $A \cap B$ y $A \cup B$, véase la Figura 3.5. Si asignamos la longitud R al intervalo $A \cup B$ y r al intervalo $A \cap B$, una cuenta relativista nos da que la longitud propia de A , igual a la de B (por estar dispuestos simétricamente) es \sqrt{rR} . La desigualdad numérica sobre álgebras (3.4.1) se convierte en una desigualdad numérica sobre una función de una sola variable, la entropía $S(l)$ de un intervalo de longitud propia l :

$$2S(\sqrt{rR}) \geq S(R) + S(r) . \quad (3.4.2)$$

En el límite $R \rightarrow r$, en el que el arreglo geométrico de la Figura 3.5 se contrae verticalmente, se obtiene, de (3.4.2), que

$$rS''(r) + S'(r) \leq 0 . \quad (3.4.3)$$

Las primas son derivadas respecto de la variable r . Esta desigualdad puede escribirse

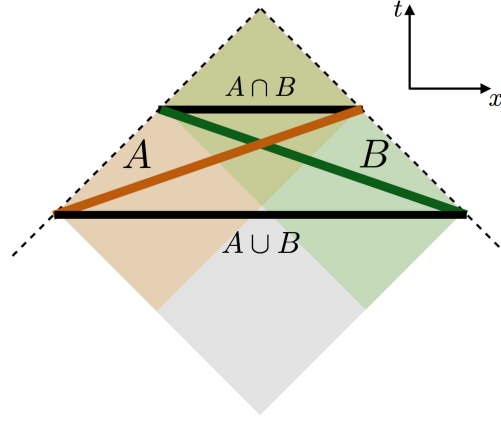


Figura 3.5: El álgebra $A \cap B$ está asociada a los operadores localizados en el diamante chico que resulta de intersectar los desarrollos causales de A y B . Esta álgebra es generada por los operadores localizados en el intervalo horizontal representado por la misma letra $A \cap B$. El álgebra $A \cup B$ está asociada a los operadores localizados en el diamante grande que resulta del desarrollo causal de las regiones A y B juntas. Esta álgebra es también la generada por los operadores localizados en el intervalo horizontal representado por la misma letra $A \cup B$.

de la forma más sugerente

$$(rS'(r))' \leq 0, \quad (3.4.4)$$

de donde concluimos que la función

$$c(r) = 3rS'(r), \quad (3.4.5)$$

es monótona decreciente. Está claro que la normalización de 3 se introdujo pensando en (2.2.76) y en la aplicación de (3.4.5) al grupo de renormalización. Teniendo en cuenta la relación (2.2.76) para las CFTs de los puntos fijos

$$S(l) = \frac{c}{3} \log l/\epsilon, \quad (3.4.6)$$

vemos que la función $c(r)$ entrópica (3.4.5) tiene la propiedad de igualarse a las cargas centrales c_{UV} y c_{IR} en los límites cuando $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$ respectivamente. La idea detrás de esto es la siguiente. La teoría (no conforme) para la cual se calcula la entropía de un intervalo, se aproxima a una teoría conforme CFT_{UV} cuando las distancias involucradas son muy pequeñas (sus funciones de correlación se aproximan), por lo que la dependencia de la entropía con el tamaño del intervalo debe aproximarse al de la CFT_{UV} , con dependencia logarítmica y coeficiente c_{UV} . Lo mismo debe suceder con la dependencia de la entropía con el tamaño del intervalo cuando este es muy grande: debe aproximar un comportamiento logarítmico con coeficiente c_{IR} .

Es interesante notar que la función c entrópica no coincide con la función de Zamolodchikov. Por ejemplo, la función c de Zamolodchikov para el campo escalar

libre masivo es mayor que la del fermión libre masivo. En cambio, la función entrópica c del escalar libre masivo es menor que la del fermión libre masivo, Figura 3.6.

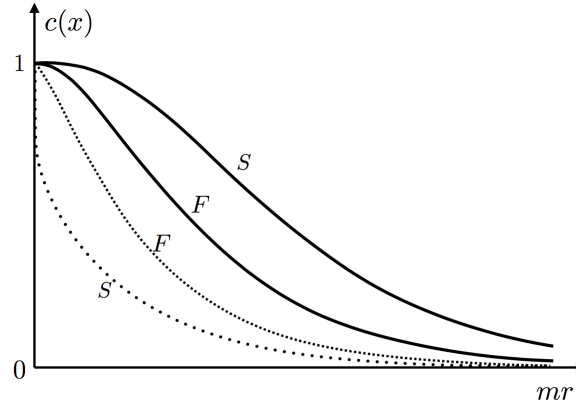


Figura 3.6: En línea discontinua, las funciones c -entrópicas del escalar (S) y el fermión (F) libres de masa m . En línea continua las funciones $c(x)$ de Zamolodchikov para el escalar (S) y el fermión (F) libres de masa m .

Es importante notar cómo entraron los ingredientes de invariancia de Lorentz y causalidad y unitariedad al identificar las álgebras unión e intersección. Si solo aplicamos la SSA para intervalos no boosteados, en cuyo caso no necesitamos la causalidad ni la invariancia del vacío antes boost (solo ante traslaciones), se obtendría la desigualdad $S''(r) \leq 0$, que es más débil que (3.4.3), y con la cual no se puede lograr un teorema c . La implicación de la SSA sobre las propiedades de la entropía de un intervalo en QFT se hace más fuerte cuando se combina con la invariancia de Lorentz.

3.4.2. Teorema F entrópico

Un elemento importante en la demostración anterior para obtener un teorema c es la relación que se tiene en una CFT entre la entropía de un intervalo y la carga central. El equivalente de esto en dimensión mayor viene dado por el conocimiento de la entropía de una esfera en una CFT. Sin embargo, al intentar extender las ideas de la demostración anterior a dimensión $d = 3$, nos encontramos con el problema de que la unión e intersección de esferas no es una esfera. Surge además otro problema aparentemente mayor, que es que la intersección de dos esferas (en $d = 3$, círculos) tiene dos puntas o defectos geométricos, que producen, en el límite del continuo, una contribución adicional divergente que haría de la SSA una desigualdad trivial a la que no se le puede extraer ninguna información. Para resolver este problema, uno puede recurrir a la geometría de Minkowski, y en lugar de ubicar la dos esferas que se intersectan sobre un mismo plano espacial, ubicar estas de forma boosteada y sobre un mismo cono nulo. La ventaja de esto es que ahora el ángulo de intersección está ubicado en una superficie nula, y en la geometría de Minkowski, un ángulo sobre una superficie

nula tiene siempre la misma amplitud π . O sea, el producto vectorial en Minkowski de dos vectores unitarios con inicio y final sobre una superficie nula es siempre -1 , con independencia de su orientación. Esto podría resolver estas divergencias, ya que π es el ángulo de *no vértice*. Para lidiar con el otro problema de que la unión e intersección de círculos no son círculos, una de las ideas principales en [41] es que, en lugar de aplicar directamente la SSA, aplicar una versión simetrizada de esta.

Sea que en la SSA (2.1.21)

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B) + S(A \cap B) , \quad (3.4.7)$$

tomamos los conjuntos A y B como esferas iguales y dispuestas en distintas posiciones angulares en un mismo cono nulo (llamamos A y B también a las álgebras de operadores correspondientes localizadas en los desarrollos causales de estas esferas). Sumemos en ambos lados de (3.4.7) la entropía de otro conjunto C , que tomamos como una copia de las esferas A y B . Usando repetidamente la SSA obtenemos

$$\begin{aligned} & S(A) + S(B) + S(C) \\ & \geq S(A \cap B) + S(A \cup B) + S(C) \\ & \geq S(A \cup B \cup C) + S((A \cup B) \cap C) + S(A \cap B) \\ & \geq S(A \cup B \cup C) + S(((A \cup B) \cap C) \cup (A \cap B)) + S(A \cap B \cap C) \\ & = S(A \cup B \cup C) + S((A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C)) + S(A \cap B \cap C) . \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

En general, para un número arbitrario de conjuntos $(X_i)_{i=1,\dots,N}$, podemos probar por inducción, a partir de (3.4.8), que

$$\sum_i S(X_i) \geq S(\cup_i X_i) + S(\cup_{\{ij\}} (X_i \cap X_j)) + S(\cup_{\{ijk\}} (X_i \cap X_j \cap X_k)) + \dots + S(\cap_i X_i) . \quad (3.4.9)$$

Tenemos N términos en cada miembro. Los conjuntos del miembro derecho están ordenados por inclusión de derecha a izquierda, y cada miembro es totalmente simétrico ante permutaciones de las N regiones X_i .

Si tomamos todos los conjuntos X_i como copias idénticas de una esfera boosteada sobre el cono nulo (pensando en el caso general de d dimensiones) y distribuimos uniformemente estas copias sobre el ángulo sólido espacial, la forma geométrica de los conjuntos en el miembro derecho de (3.4.9) es algo similar a esferas irregulares, o esferas con un perfil de sierra, como muestra la Figura 3.7, para el caso de $d = 3$.

En el miembro derecho de (3.4.9) tenemos el más pequeño de todos los conjuntos, que es una esfera aproximada (con defectos), que resulta de la intersección de todas las esferas boosteadas. De forma similar, tenemos el conjunto más grande, que es la esfera

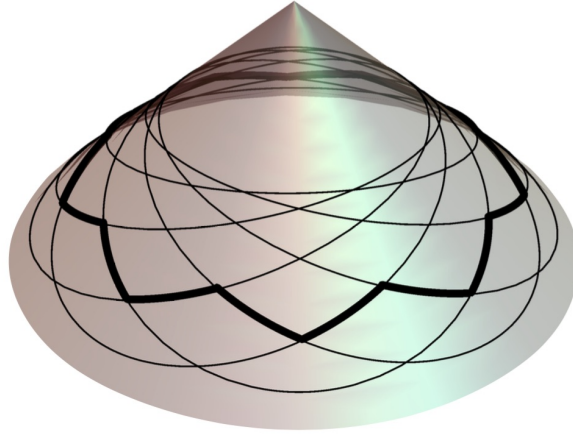


Figura 3.7: Esferas boosteadas y uniformemente distribuidas sobre el cono nulo. La unión de distintos grados de intersecciones de estas esferas forman esferas irregulares como la resaltada.

con defectos que resulta de la unión de todas las copias de la esfera boosteada. Estas esferas con defectos se disponen de forma aproximada sobre planos de tiempo constante. Sean los radios de estas esferas irregulares menor y mayor, r y R respectivamente. Una cuenta relativista nos da (en toda dimensión d) que el radio propio de las esferas boosteadas es \sqrt{rR} , como en el caso de $d = 2$. En el límite del número de copias muy grande, puedo escribir (3.4.9) de la siguiente forma

$$S(\sqrt{rR}) \geq \int_r^R dl \, \beta(l) \tilde{S}(l). \quad (3.4.10)$$

En esta expresión, $\tilde{S}(l)$ son las entropías de las esferas irregulares que resultan de la unión de intersecciones de los conjuntos en (3.4.9). Estas tienen un radio aproximado $l \in (r, R)$, y están dispuestas aproximadamente en plano de tiempo constante $t = l$. La desviación de estas en comparación con la esfera perfecta de radio l en $t = l$, tiene un ancho típico $\sim l/N^{1/(d-2)}$, que tiende a cero para N grande. $\beta(l)$ es la densidad de estas esferas irregulares en el límite $N \rightarrow \infty$: el número de esferas irregulares entre los radios l y $l + dl$ dividido N . La integral (3.4.10) es una suma por N de estas esferas irregulares dividido N . La densidad $\beta(l)$ se calcula en detalle en el Apéndice A. Esta es

$$\beta(l) = \frac{\text{Vol}(S_{d-3})}{\text{Vol}(S_{d-2})} \frac{2^{d-3} (rR)^{\frac{d-2}{2}} ((l-r)(R-l))^{\frac{d-4}{2}}}{l^{d-2} (R-r)^{d-3}}, \quad (3.4.11)$$

y tiene integral igual a 1,

$$\int_r^R dl \, \beta(l) = 1. \quad (3.4.12)$$

La expresión (3.4.10) es el equivalente de (3.4.2) en d dimensiones. A diferencia de $d = 2$, no tenemos la entropía de objetos similares en ambos miembros. En (3.4.10) tengo en

el miembro izquierdo la entropía de una esfera, y en el miembro derecho la entropía de esferas con defectos. Sin argumentos adicionales no podemos tomar la entropías de estas como entropías de esferas, y de hacerlo, en general obtendríamos resultados incorrectos. En el Capítulo 6 se determinará la forma explícita de la entropía de cualquier región con borde sobre el cono nulo, incluyendo estas esferas con defectos, para el vacío de una CFT. Sin embargo, en el caso de $d = 3$, y como también se justifica en el análisis de los Capítulos 6 y 7, sí podemos tomar la entropía de círculos con defectos como la entropía del círculo perfecto al que tiende en el límite de N grande.

Si en (3.4.10) quisiera tomar la entropía de las esferas irregulares $\tilde{S}(l)$ como la entropía de esferas suaves $S(l)$, debe ocurrir que los términos de área en ambos miembros de (3.4.10) sean iguales

$$(\sqrt{rR})^{d-2} = \int_r^R dl \beta(l) l^{d-2} , \quad (3.4.13)$$

de otra forma, como la entropía es divergente UV y crece con el área, la desigualdad (3.4.10) con $\tilde{S}(l) \rightarrow S(l)$ quedaría infinitamente desbalanceada y no podría aportar ninguna información finita sobre el término universal. Sin embargo, la densidad $\beta(l)$, (3.4.11), calculada suponiendo que el arreglo geométrico está sobre el cono nulo, sí cumple (3.4.13), y una $\beta(l)$ calculada suponiendo que el arreglo geométrico no está sobre el cono nulo, sino, por ejemplo, sobre la hoja de un hiperboloide de distancia Minkowskiana constante respecto del origen, no cumplirá (3.4.13) en general. Este es otro de los puntos importantes del por qué aplicar la SSA a esferas boosteadas sobre el cono nulo.

En $d = 3$, y en el límite de N grande, puedo tomar $\tilde{S}(l) \rightarrow S(l)$. En el límite en que $R \rightarrow r$, se obtiene de (3.4.10) y (3.4.11) la desigualdad

$$S''(r) \leq 0 . \quad (3.4.14)$$

Esta desigualdad equivale a decir que la función

$$F(r) = rS'(r) - S(r) , \quad (3.4.15)$$

es monótona decreciente con la escala r . Por la expresión (2.2.80) para $d = 3$

$$S_{\text{CFT}}^{d=3} = \mu_1 r - F , \quad (3.4.16)$$

podemos comprobar que en los puntos fijos $F(r)$ iguala a la cantidad F : el término constante en la función de partición de la CFT en una esfera Euclídea. Con esto, de (3.4.14) y (3.4.15) se establece el Teorema F : irreversibilidad del grupo de renormalización en dimension $d = 3$.

$$F_{UV} \geq F_{IR} . \quad (3.4.17)$$

Podemos convencernos del hecho de que en el IR, la función $F(r)$ aproxima a F_{IR} ; $F(r \gg m^{-1}) = F_{IR}$, analizando el origen local o no local de los términos involucrados en la entropía. Para radios r del círculo del orden de la escala de masa m de la teoría, $r \sim m^{-1}$, la dependencia de la entropía con r es muy complicada y no se puede detallar mucho la forma de su estructura de divergencias. Sin embargo, en el límite en que $r \gg m^{-1}$, el entrelazado que aportan los grados de libertad masivos es de corto alcance en comparación con el tamaño del círculo, por lo que la escala de masa solo puede aparecer en la entropía de forma local y extensiva a lo largo de la superficie del círculo, y por ello, solo está presente en el término de área (lineal con r).

$$S(r \gg m^{-1}) = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{\epsilon} - \tilde{\mu}_0 m \right) r - F_{IR} . \quad (3.4.18)$$

En cambio, el término constante F no es la integral de ningún escalar geométrico a lo largo de la superficie de entrelazado, por lo que es siempre no local, y para la entropía de un círculo muy grande, solo puede provenir del comportamiento conforme IR.

Capítulo 4

Teoremas del Área

En este capítulo comenzamos la exposición de los resultados originales de esta Tesis, analizando cómo renormaliza el coeficiente del término de área en la entropía de entrelazado: Teoremas del Área. En dimensión $d = 2$ este Teorema del Área equivale al Teorema c de Zamolodchikov, y en dimensión $d > 2$, extiende la fórmula de Zamolodchikov, que en dimensión $d = 2$ nos da la variación total de la carga central, a la expresión que nos da el cambio en el coeficiente del término de área en la entropía de entrelazado en d dimensiones. Más adelante se presenta un enfoque alternativo e independiente para reobtener el Teorema del Área, en el cual se usan las propiedades de la entropía relativa entre los estados de vacíos del punto fijo UV y de la teoría perturbada que implementa un flujo del GR. Nos encontramos en este caso con ciertas sutilezas interesantes, dado que los estados pertenecen a teorías con distinta evolución temporal, y la entropía relativa dependerá entonces de la superficie de Cauchy en la cual estos estados se comparan. En particular, veremos que para poder extraer información sobre el grupo de renormalización, necesitaremos comparar los estados en una superficie de Cauchy nula. Como resultado se obtiene en $d = 2$ una nueva demostración del Teorema c , dado que la distinguibilidad de estos estados, medida por la entropía relativa, resulta controlada por la diferencia de las cargas centrales.

Los flujos del GR pueden ser (parcialmente) caracterizados por la función de correlación de la traza del tensor de energía-momentos $\Theta(x) = T_\mu^\mu(x)$. Una razón para esto es que $\Theta(x)$ no es un operador independiente de la teoría, sino que viene determinado por \mathcal{O}_i y las funciones β de los acoplamientos g_i en

$$S = S_{UV} + \int d^d x g_i \mathcal{O}_i(x) , \quad (4.0.1)$$

por la relación operatorial $\Theta(x) = \beta_i \mathcal{O}_i(x)$ (salvo anomalías conformes). El caso mejor entendido es el del flujo entre dos CFTs en $d = 2$. La unitariedad de $\Theta(x)$ provee la desigualdad en el Teorema de Zamolodchikov, y su función de dos puntos nos da la

regla de suma [44, 119]

$$c_{UV} - c_{IR} = 3\pi \int d^2x \, x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle, \quad (4.0.2)$$

donde c_{UV} y c_{IR} son las cargas centrales en el UV y el IR respectivamente. Los primeros estudios de la función de dos puntos del tensor de energía momentos en $d > 2$ fueron hechos en [119, 125–128], aunque no se estableció ningún vínculo claro entre esta cantidad y aspectos globales del flujo del GR. Persiste la cuestión de si (y cómo) $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle$ codifica alguna propiedad no trivial del GR.

Veremos que esta función de dos puntos $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle$ está relacionada con dos objetos muy diferentes : la entropía de entrelazado de una superficie plana y la renormalización de la constante de Newton. Esta conexión, propuesta en [33], está motivada por la fórmula de la entropía de agujero negro (aunque el resultado final se expresa en espacio plano).

La idea general de identificar la entropía de agujero negro y la EE tiene una larga historia, comenzando en [24]. Susskind y Uglum propusieron que la EE debería renormalizar en la misma forma que $(4G_N)^{-1}$ [25]. El asunto fue revisitado en repetidas ocasiones en el pasado [17, 26, 129–134].

La fórmula para la entropía de agujero negro,

$$S_{BH} = \frac{1}{4G_N} A, \quad (4.0.3)$$

donde G_N es la constante de Newton y A el área del horizonte de eventos del agujero negro¹, ha tenido un gran impacto en la física teórica, donde confluyen la gravedad, la mecánica cuántica y la teoría de la información. Esta fórmula ha sido fundamental para el descubrimiento de la naturaleza holográfica de la gravedad cuántica [108]. Un aspecto que destaca en esta es su dependencia con el área, y no con el volumen, como uno esperaría para una entropía termodinámica en ausencia de gravedad. Esta dependencia con el área también la encontramos en la entropía de entrelazado. La posibilidad de que el origen estadístico de la entropía de un agujero negro pueda ser explicada como la entropía de entrelazado a través del horizonte de eventos [24] es uno de los motivos para estudiar la EE en QFT, y en particular, el comportamiento de su término de área.

En [33] propusimos que el término de área en la EE está relacionado con la fórmula de Adler-Zee para la renormalización de la constante de Newton G_N [135, 136]

$$\Delta((4G_N)^{-1}) = -\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x \, x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle + \frac{4\pi}{d-2} \langle \mathcal{O} \rangle. \quad (4.0.4)$$

¹Para facilitar la notación en QFT se trabaja con unidades en las que todas las cantidades de $\left(\frac{k_B c^3}{\hbar}\right)$ son igual a uno, con lo que la fórmula de agujero negro con las unidades restauradas queda $S_{BH} = \frac{1}{4G_N} \left(\frac{k_B c^3}{\hbar}\right) A$.

Como se ha notado en varios lugares de la literatura, [90, 137–139], para regiones que son grandes en comparación con la escala de masa de la teoría, se espera que el término de área en la EE tenga una expansión de la forma

$$S = \mu L^{d-2} + \text{sub-dominantes}, \quad (4.0.5)$$

$$\mu = \left(\frac{k_{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + k_{d-3} \frac{m}{\epsilon^{d-3}} + \dots + k_0 m^{d-2} \log(m\epsilon) + k'_0 m^{d-2} \right). \quad (4.0.6)$$

El término de área no debe depender de la forma de la superficie de entrelazado siempre que la curvatura de esta sea mucho más pequeña que la escala de masa m . En esta expresión L^{d-2} es el área de la superficie de entrelazado, m es una escala de masa de la teoría, y ϵ es un cutoff UV. La estructura de potencias de las divergencias es solo representativa. Podemos tener teorías en donde las divergencias tienen potencias no enteras, que en general vienen acompañadas de coeficientes no universales. Ejemplos de esto podemos encontrar en teorías holográficas [140–142]. Sin embargo, el coeficiente k_0 del término logarítmico en el área debe ser universal. Cuando no tenemos un logaritmo en el desarrollo, es el término constante $k'_0 m^{d-2}$ independiente de cutoff el que es universal (en presencia del logaritmo este término no es universal). Para campos libres, el término logarítmico aparece en dimensiones pares, mientras que está ausente en dimensiones impares [137]. Tenemos entonces que existen algunos términos universales en el término de área en el caso no conforme. Una definición no ambigua de estos requiere el uso de una regularización suficientemente buena [143], como la que se logra con el cálculo de la EE a través de la información mutua [144].

Una forma útil de pensar las correcciones de masa al término de área μ de (4.0.6) es que estas surgen a medida que cambiamos el tamaño de la región, de $L \ll m^{-1}$ a $L \gg m^{-1}$. En este esquema, los términos dependientes de la masa en el término de área μ para una superficie muy grande (casi plana), miden el cambio total del término de área entre los límites UV e IR de la teoría, y dependen de los detalles del flujo del GR. Esta misma renormalización ocurre para la entropía de agujeros negros (a través de la constante de Newton) cuando este cruza la escala de masa de alguna teoría de campos que vive en el mismo espacio. La idea de un cambio en el coeficiente del término de área en la EE con la escala de la región, en combinación con la fórmula de la entropía de agujero negro, sugiere que, aún cuando no se entienda del todo cómo la gravedad renormaliza las divergencias UV en la EE, una contribución universal a la entropía de agujero negro debe tener su origen en QFT, y coincidir y ser calculable como la misma contribución universal en el término de área de la EE [25, 129]. De forma más precisa, la parte universal en la renormalización del término de área en la EE debe coincidir con la parte universal en la renormalización de la constante de Newton $(4G_N)^{-1}$.

Se propone entonces que

$$\mu = \Delta \left(\frac{1}{4G_N} \right), \quad (4.0.7)$$

y con ello la identificación

$$\mu = -\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int_{|x|>\delta} d^d x \, x^2 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle. \quad (4.0.8)$$

Aquí $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$ es la función de dos puntos conectada evaluada en espacio Euclídeo. El cutoff infinitesimal δ está puesto para eliminar términos de contactos. Estos términos de contacto son términos no físicos, que dependen del esquema de regularización de la teoría, y su presencia podría modificar de forma artificial el valor de μ .

La fórmula en (4.0.8) difiere de la de Adler-Zee [135, 136] para la renormalización de la constante de Newton (cuando los campos cuánticos sobre un espacio debilmente curvado son integrados), por el término $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \delta\Theta/\delta R \rangle$. Este es el valor de expectación de la variación de la traza del tensor de energía-momentos con respecto a la curvatura de una métrica conformemente plana [145, 146], y es relevante cuando tenemos acoplamientos no minimales de los campos con la curvatura. En espacio plano esta ambigüedad se traduce en que el tensor de energía-momentos de la teoría puede tener mejoras (improvements), lo cual ocurre para campos libres, por ejemplo el escalar y el vector libre. Estas excepciones a la validez de la identificación (4.0.8), debido al término $\langle \delta\Theta/\delta R \rangle$, fueron estudiadas en [33], y ocurre solo para campos libres.

Comenzamos implementando estas ideas derivando la relación (4.0.8) a partir de la integral funcional. Veremos a continuación qué implicación tiene esta fórmula sobre los teoremas c y F . Seguidamente realizaremos un cálculo holográfico completo para verificar la igualdad entre los términos universales de μ y $\Delta((4G)^{-1})$. En §4.4 introducimos el problema holográfico y discutimos algunas de las propiedades de GR holográfico y el enfoque Hamiltoniano en gravedad que usaremos más adelante. En §4.5 calculamos la función de dos puntos de $\Theta(x)$ para un flujo del GR holográfico entre dos CFTs, y establecemos la regla de suma (4.0.8). Algunas consecuencias y aplicaciones son discutidas en §4.6, incluyendo la relación con la información mutua, propiedades de la función espectral del tensor de energía momentos, y una prueba holográfica de la positividad de reflexión.

Después de esto, abordaremos el tema del flujo GR del término de área en la EE desde una perspectiva muy diferente. En §4.8 estudiamos la entropía relativa entre los estados de vacíos del punto fijo UV y de la teoría perturbada que implementa un flujo del GR, y su dependencia con la superficie de Cauchy donde estos estados son comparados. Veremos las condiciones para que esta (la entropía relativa) y la renormalización del término de área, sea finita. En §4.9 estudiaremos las consecuencias de la positividad y la monotonidad de la entropía relativa evaluada sobre la superficie

de Cauchy nula. Como resultado, obtendremos una nueva demostración del Teorema *c* y reobtendremos el Teorema del Área: el término de área renormaliza de forma decreciente entre el UV y el IR ante un flujo del GR en d dimensiones.

4.1. Fórmulas para el término de área

Como vimos en el Capítulo 2, la variación de la EE ante una pequeña desviación del estado viene dada por

$$\delta S = \text{tr}(\delta \rho K) \quad (4.1.1)$$

con $\delta S = S(\rho) - S(\rho_0)$, $\delta \rho = \rho - \rho_0$, y K el Hamiltoniano modular de ρ_0 [63] y la matriz densidad puede ser representada como la integral funcional en el espacio Euclídeo con condiciones de contorno a tiempo $t = 0^+$ y $t = 0^-$ sobre la región V . En (4.1.1) el operador K está insertado presisamente en ese corte a $t = 0$ y $\vec{x} \in V$. El vacío corresponde con la integral en espacio Euclídeo sin perturbar. Los estados excitados vendrán representados por otras condiciones de borde o fuentes externas en Lagrangiano de la integral funcional. Con esta idea, en [147, 148] se obtuvo una fórmula para la variación de la EE ante cambios infinitesimales en la acción de la integral funcional dados por un término extra de un operador relevante. Si la acción contiene un término $\beta \int d^d x O(x)$, se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = - \int d^d x \langle O(x) K \rangle_\beta. \quad (4.1.2)$$

La variación de la EE viene dada por la integral funcional que nos da el valor de espec-tación del operador con el Hamiltoniano modular del estado insertado. Para obtener el término universal en el término de área usamos el hecho de que para una superficie de entrelazado plana, la EE tiene la forma $S = L^{d-2} \mu$. Tenemos entonces variando L que

$$L \frac{dS}{dL} = (d-2)S. \quad (4.1.3)$$

Una forma equivalente de producir una variación en el tamaño de la región es por el cambio $x \rightarrow \lambda x$ en las coordenadas de la integral funcional que determina a la matriz densidad en (4.1.1), manteniendo fijos los parámetros de masa y tamaño de la región. Esto a su vez equivale a bajar de la acción $\mathcal{A} = \int d^d x \mathcal{L}$ la cantidad

$$\int d^d x \left(\sum_i \partial_\mu \phi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} - d \mathcal{L} \right) = \int d^d x g_{\mu\nu} \left(\sum_i \partial_\nu \phi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right). \quad (4.1.4)$$

Para campos libres, la cantidad entre paréntesis es la traza del tensor de energía-momentos canónico. Para campos con punto fijo UV interactuante debemos tener en

(4.1.4) la traza $\Theta = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ del tensor de energía-momentos, único, y que no admite improving. Se tiene entonces que

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \int dx^d \langle \Theta(x) K \rangle. \quad (4.1.5)$$

Esta relación debe valer solo para el término universal, pues hemos dejado sin especificar cómo el cutoff cambia con la transformación. Como $L \frac{dS}{dL} = \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1}$, tenemos de (4.1.3) que

$$S = \frac{1}{(d-2)} \int dx^d \langle \Theta(x) K \rangle = -\frac{2\pi}{d-2} \int d^d x \int_{y^1 > 0} d^{d-2} y y^1 \langle \Theta(x) T_{00}(y) \rangle. \quad (4.1.6)$$

El coeficiente del término de área viene entonces dado por

$$\mu = -\frac{2\pi}{d-2} \int d^d x \int_{y^1 > 0} dy^1 y^1 \langle \Theta(x) T_{00}(y) \rangle. \quad (4.1.7)$$

La parte universal de esto debe ser extraída regularizando esta expresión divergente.

Una simplificación importante de esta fórmula fue obtenida en [148] usando la representación espectral del correlador del tensor de energía-momentos [119],

$$\langle T_{\alpha\beta}(x) T_{\rho\sigma}(0) \rangle = \frac{A_d}{(d-1)^2} \left(\int ds c^{(0)}(s) \Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(0)}(\partial) G_0(x, s) + \int ds c^{(2)}(s) \Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(2)}(\partial) G_0(x, s) \right), \quad (4.1.8)$$

con

$$A_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d+1)\Gamma(d/2)2^{d-2}}, \quad (4.1.9)$$

y donde $\Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(0)}$ y $\Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(2)}$ son polinomios tensoriales de orden cuatro en las derivadas ∂ , $c^{(0)}(s)$ y $c^{(2)}(s)$ son las funciones espectrales de espín cero y dos, y $G_0(x, s)$ es la función de Green del campo escalar libre de masa s ,

$$G_0(x, s) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{s}{2\pi|x|} \right)^{(d-2)/2} K_{(d-2)/2}(s|x|). \quad (4.1.10)$$

En particular $\Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(2)}$ tiene traza cero, con lo cual $c^{(2)}(s)$ no entra en la fórmula (4.1.7). El tensor $\Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(0)}$ es

$$\Pi_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{(0)} = \frac{1}{\Gamma(d)} (\partial_\alpha \partial_\beta - \delta_{\alpha\beta} \partial^2) (\partial_\rho \partial_\sigma - \delta_{\rho\sigma} \partial^2). \quad (4.1.11)$$

La ecuación (4.1.7) se convierte con esto en [147]

$$\mu = -\frac{2\pi A_d}{(d-1)(d-2)\Gamma(d)} \int_0^\infty ds c^{(0)}(s). \quad (4.1.12)$$

Notemos que para obtener esta expresión a partir de (4.1.7) $\Theta(x)$ y $T_{00}(x)$ deben ser del mismo tensor de energía-momentos (conservado y simétrico), para que la fórmula espectral sea válida.

Una aplicación muy simple de la representación espectral, nos permite ver que el término de área μ en la EE puede expresarse en términos del correlador de $\Theta(x)$, como en la fórmula de Adler-Zee (AZ) para la renormalización de la constante de Newton (4.0.4). Se tiene que

$$\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle = \frac{A_d}{\Gamma(d)} \int_0^\infty ds c^{(0)}(s) s^4 G(x, s). \quad (4.1.13)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle 0 | \Theta(0)\Theta(x) | 0 \rangle \\ &= -\frac{\pi A_d}{d(d-1)(d-2)\Gamma(d)} \int d^d x x^2 ds c^{(0)}(s) s^4 G(x, s) \\ &= -\frac{2\pi A_d}{(d-1)(d-2)\Gamma(d)} \int_0^\infty ds c^{(0)}(s), \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

que es (4.1.12).

En el último paso hemos usado que

$$\int d^d x G_0(x, s) x^2 = \frac{2d}{s^4}. \quad (4.1.15)$$

Es interesante notar que la expresión

$$\mu = -\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int_{|x|>\delta} d^d x x^2 \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle. \quad (4.1.16)$$

formalmente nos da un resultado negativo en cualquier dimensión. Sin embargo, un análisis perturbativo nos da que $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle \sim |x|^{-2\Delta}$ para x pequeño, con Δ la dimensión \mathcal{O} del operador que perturba a la CFT UV, con lo cual, la expresión (4.1.16) es divergente cuando $\Delta > \frac{d+2}{2}$. En estos casos, (4.1.16) debe ser entendida como válida solo para la parte universal contenida en cada miembro, y esta parte universal no tiene que ser necesariamente negativa.

4.2. Relación con los teoremas de irreversibilidad en $d = 2$ y $d = 3$

Veamos primero la conexión de la fórmula (4.1.16) para el término de área con el Teorema c de Zamolodchikov en $d = 2$. La fórmula (4.1.16) no puede aplicarse

directamente en $d = 2$ debido al factor de $(d - 2)$ en el denominador. Sin embargo, podemos continuarla analíticamente y tomar el límite $d \rightarrow 2$. Para esto, extraemos de la integral del correlador un parámetro de masa m para hacer esta adimensional

$$\mu = -\frac{\pi m^{d-2}}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 m^{-(d-2)} \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle. \quad (4.2.1)$$

En el límite $d \rightarrow 2$ obtenemos un término universal logarítmico

$$\mu = -\frac{\pi}{2} \left(\int d^2 x x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle \right) \log(m). \quad (4.2.2)$$

La integral en paréntesis es adimensional y es igual a la diferencia de las cargas centrales de las CFTs en el UV y el IR

$$\Delta c = c_{UV} - c_{IR} = 3\pi \int d^2 x x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle. \quad (4.2.3)$$

Esta es siempre positiva, por ser el integrando positivo (positividad de reflexión) y la integral convergente.

De (4.2.2) se tiene entonces que

$$\mu = -\frac{1}{6} (c_{UV} - c_{IR}) \log(m\epsilon), \quad (4.2.4)$$

donde hemos insertado un cutoff ϵ de distancia para compensar las unidades.

En efecto, esto es lo que esperamos para la renormalización del término de área en $d = 2$. Para un intervalo pequeño de tamaño R en $d = 2$ la entropía es

$$S_{UV} = \frac{c_{UV}}{3} \log(R/\epsilon) + k_0, \quad (4.2.5)$$

con k_0 una constante no universal.

Cuando el intervalo es grande en comparación con la escala de masa de la teoría debemos tener que

$$S_{IR} = \frac{c_{IR}}{3} \log(R/\epsilon) + k'_0 - \frac{c_{UV} - c_{IR}}{3} \log(m\epsilon). \quad (4.2.6)$$

El coeficiente en el último término viene fijado de requerir que el término $\log(\epsilon)$ en S_{UV} y S_{IR} debe ser el mismo. Este término es generado por el entrelazamiento de los grados de libertad UV alrededor de los bordes del intervalo, y debe ser independiente del tamaño del intervalo. La escala de masa m puede elegirse como se quiera.

El último término en (4.2.6) debe ser comparado con (4.2.4), en donde tenemos $-(c_{UV} - c_{IR})/6$, mientras que el coeficiente del término de área es, para un intervalo grande $-(c_{UV} - c_{IR})/3$. Esto es porque la fórmula (4.2.2) es para la mitad del espacio,

que tiene solo una frontera, mientras que el intervalo tiene dos fronteras. Concluimos que (4.1.16) nos da correctamente la renormalización del término de área en la EE en $d = 2$ para cualquier teoría.

En dimensión $d = 3$ el Teorema F nos dice que el término constante F en la entropía de un círculo decrece entre los puntos fijos UV e IR. En el punto conforme en $d = 3$ la EE es

$$S(R) = R \left(\frac{k_1}{\epsilon} + k_0 \right) - F. \quad (4.2.7)$$

Fuera del punto fijo, y como vimos en la Sección 3.4.2, la SSA y la invariancia de Lorentz implican que

$$S''(R) < 0. \quad (4.2.8)$$

La renormalización de los términos constante y de área viene dada por (véase ecuación (3.4.15)),

$$F_{UV} - F_{IR} = - \int_0^\infty dR R S''(R) \geq 0, \quad (4.2.9)$$

$$\mu = k_0^{IR} - k_0^{UV} = \int_0^\infty dR S''(R) \leq 0. \quad (4.2.10)$$

De aquí podemos ver que en $d = 3$ la renormalización del término de área tiene signo negativo. Esto está de acuerdo con el signo en la fórmula

$$\mu = -\frac{\pi}{6} \int d^3x x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle. \quad (4.2.11)$$

En $d = 3$ pudiéramos tener teorías para las cuales esta integral es divergente. Si perturbamos el punto fijo con un operador relevante ($1/2 < \Delta < 3$) obtendremos $\langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle \sim |x|^{-2\Delta}$ para x pequeño, que nos da una integral convergente en (4.2.11) para $\Delta < 5/2$. En el caso de una perturbación con $3 > \Delta > 5/2$ en el UV, el término de área no tiene una variación finita, y no tenemos un término universal finito. Esto es lo que sucede holográficamente, como veremos en la próxima Sección. En dimensión d el término de área tiene una renormalización infinita para $\Delta > (d+2)/2$ y un término logarítmico para $\Delta = (d+2)/2$ [148, 149]. Esto es $5/2$ en $d = 3$.

Es muy importante notar que una renormalización infinita del término de área no implica una renormalización infinita para el término constante F , dado que la variación de F está suprimida por un término R en (4.2.9), en comparación con (4.2.10).

Ambas renormalizaciones, (4.2.9) y (4.2.10), dependen de la segunda derivada $S''(R)$. Estas fórmulas no restringen mucho la relación entre ΔF y μ , excepto por lo siguiente. Si $\mu \neq 0$, necesariamente $S'' \neq 0$ (y $S'' < 0$, estrictamente). Esto implica que $\Delta F > 0$ estrictamente. Una renormalización del término de área implica siempre una variación finita y distinta de cero del término constante en la entropía de un círculo.

En relación con este comentario, es interesante ver que en la fórmula (4.2.11), un $\mu \neq 0$ equivale a que el correlador de Θ es distinto de cero, y por ello Θ mismo distinto de cero. Si la teoría está fuera del punto fijo, entonces $\Theta(x) \neq 0$, y necesariamente $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle > 0$ para algún x . Esto implica que $\mu \neq 0$ y que $\Delta F > 0$, estrictamente. Tenemos entonces un resultado análogo al que se obtiene de (4.2.3) para el teorema de Zamolodchikov en $d = 2$: En el flujo entre dos puntos fijos UV y IR, la carga central no solo decrece, sino que no puede permanecer constante. Lo mismo sucede para la cantidad F en $d = 3$.

4.2.1. Fermión libre

Antes de pasar a la comprobación holográfica de (4.0.8), veamos brevemente que esta se cumple para el caso del fermión libre. El fermión libre es un buen ejemplo, ya que, a pesar de ser una teoría libre, no tiene ambigüedades en su tensor de energía-momentos (no admite mejoras o impruvings) y no necesitamos analizar el término extra en (4.0.4).

El término universal en el término de área de la EE para las teorías libres fue calculado por primera vez en [137] con la técnica de heat kernel. En [33] se comprobó este resultado con la regularización de la información mutua, reducción dimensional, y las propiedades de la función entrópica c . La forma de este para el campo escalar libre de masa m en d dimensiones es

$$\mu_S = \frac{m^{d-2}\Gamma[1-d/2]}{3\pi^{d/2-1}2^d}. \quad (4.2.12)$$

De esta forma compacta, cuando tomamos dimensión par o impar obtenemos

$$\mu_S = (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{2^{d-1}3\pi^{\frac{d-2}{2}}\Gamma[d/2]} m^{d-2} \log(m\epsilon) \quad d \text{ par} \quad (4.2.13)$$

$$\mu_S = (-1)^{\frac{d-1}{2}} \frac{\pi}{2^d 3\pi^{\frac{d-2}{2}}\Gamma[d/2]} m^{d-2} \quad d \text{ impar} \quad (4.2.14)$$

Para el fermión libre se tiene

$$\mu_F = \frac{d_\Psi}{2} \mu_S, \quad (4.2.15)$$

donde d_Ψ es el número de componentes espinoriales. Estos resultados fueron reobtenidos en [139, 141]. Con esto tenemos uno de los miembros en la igualdad (4.0.8). Para ver el otro miembro, necesitamos la traza del tensor de energía-momentos del campo fermiónico

$$\Theta(x) = m\bar{\Psi}(x)\Psi(x). \quad (4.2.16)$$

Esta se anula cuando $m = 0$, correspondiendo al caso conforme. Usando Wick tenemos

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x \, x^2 \langle \Theta(0) \Theta(x) \rangle \\ &= \frac{\pi m^2}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x \, x^2 \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \text{tr} \left(\frac{i\not{p} - m}{p^2 + m^2} \frac{i\not{q} - m}{q^2 + m^2} \right) e^{-ipx} e^{iqx}.\end{aligned}$$

En el integrando, cambiamos x^2 por $-i\nabla_p \cdot i\nabla_q$ aplicado al factor de fase, y luego integramos por partes aplicando este operador diferencial a la función racional de p y q . Hacemos la integración en x , que nos da una $\delta(p+q)$, y eliminamos una de las integrales por momentos.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\pi m^2}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \text{tr} \left(\frac{i\not{p} - m}{p^2 + m^2} \frac{i\not{q} - m}{q^2 + m^2} \right) (i\nabla_p e^{-ipx})(-i\nabla_q e^{iqx}) \\ &= \frac{\pi d_\Psi m^2}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-i(p-q)x} \nabla_p \nabla_q \left(\frac{-p \cdot q + m^2}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)} \right) \\ &= \frac{d_\Psi}{d(d-1)(d-2)2^{d-1}\pi^{(d/2-1)}\Gamma[d/2]} \int_0^\infty dp \, p^{d-1} \left(\frac{8m^4 p^2}{(p^2 + m^2)^4} - \frac{dm^2}{(p^2 + m^2)^2} \right),\end{aligned}$$

donde hemos introducido la dimensión del espacio espinorial d_Ψ .

Podemos regularizar esta integral con un cutoff $|x| > \delta$ en distancias, o uno $|p| < \Lambda$ en los momentos, o simplemente usar regularización dimensional. Todas estas regularizaciones dan el mismo resultado para la parte universal, y por supuesto, resultados distintos para las partes no universales. La expresión final es más compacta usando regularización dimensional, obteniéndose

$$\mu_F = \frac{d_\Psi}{2} \frac{m^{d-2} \Gamma[1 - d/2]}{3\pi^{d/2-1} 2^d}, \quad (4.2.17)$$

en cualquier dimensión d , que coincide con (4.2.12). En dimensión $d = 3$ la integral de arriba es convergente, y nos da el resultado negativo $\mu_F = -\frac{d_\Psi}{2} \frac{m}{12}$.

Para el campo escalar libre masivo ocurre algo interesante, discutido en detalle en [33]. Para obtener el resultado correcto para la corrección al término de área μ , calculado con la información mutua, a partir del cálculo con el correlador de $\Theta(x)$, debemos lidiar con el hecho de que el tensor de energía-momentos del campo escalar masivo admite impruvings, y la posibilidad de que el término $\langle \mathcal{O} \rangle$ en (4.0.4) juegue algún papel. La ambigüedad de impruvings está directamente relacionada con la ambigüedad de tener un posible término de borde adicional en el Hamiltoniano modular, o en un acoplamiento no minimal del campo escalar con la gravedad al pasar a espacio curvo. En [33] se concluyó que para obtener el resultado correcto para μ (calculado con la información mutua), debemos tomar el tensor de energía-momentos canónico de Noether, sin impruvings.

4.3. Realización holográfica del Teorema del Área

Un problema que presenta la relación (4.0.8) es que ambos lados son difíciles de evaluar en una teoría interactuante. Por este motivo, nos enfocamos en una CFT y un flujo del GR que admita una descripción gravitatoria dual. Mostraremos que (4.0.8) se satisface holográficamente, y esto lo haremos calculando explícitamente ambos lados de la igualdad en cualquier dimensión. El principal resultado técnico es la forma del correlador de dos puntos $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$ para una deformación genérica relevante del punto fijo UV. De aquí encontramos una coincidencia con la regla de suma (4.0.8) con el cálculo de la EE en términos de áreas de superficies mínimas según la prescripción de Ruy-Takayanagi [110, 150, 151]. Estudios holográficos anteriores relacionados incluyen [47, 141, 149].

En general, ambos miembros de (4.0.8) contienen divergencias. Si el punto fijo UV es perturbado por un operador relevante de dimensión $\Delta \geq (d+2)/2$, el coeficiente en el término de área μ de la EE calculada holográficamente diverge. El miembro derecho de (4.0.8) diverge también en estos casos, pues $\langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle \sim |x|^{-2\Delta}$ para distancias pequeñas. Cuando la divergencia se da, no esperamos que los términos divergentes en ambos miembros de (4.0.8) coincidan. Sin embargo, existe una parte universal (que da siempre el mismo resultado independientemente de la regularización) dada por la parte finita o el coeficiente del término logarítmico en caso de que exista. Como dijimos, la relación (4.0.8) debe ser entendida como una igualdad entre estas partes universales. Nótese que el cambio en la constante de Newton (4.0.8), si es finita, es negativa, correspondiendo con un efecto de anti-apantallamiento de la gravedad. Si tenemos divergencias, la parte universal pudiera tener un signo positivo.

Mostraremos también que el cutoff holográfico estandar sobre la coordenada radial de AdS puede ser usado para regularizar ambos miembros, y que con este cutoff se obtiene una coincidencia exacta entre ambos miembros. Mostramos holográficamente que los términos universales coinciden con los calculados según la información mutua de dos planos paralelos cercanos.

Es interesante señalar que el cálculo holográfico del correlador de $\Theta(x)$ es formalmente igual a la evaluación de perturbaciones escalares durante el período inflacionario [152]. Este enfoque cosmológico fue aplicado recientemente en el contexto de AdS/CFT en [153], que reproduce la regla de suma para $d = 2$. Nuestro método en dimensión d fue motivado por dicho trabajo, pero difiere en los detalles del cálculo del correlador de $\Theta(x)$, como explicaremos debajo. Los resultados de estas secciones están basados en [154].

4.4. Planteo del problema holográfico

Consideramos un flujo del GR entre una CFTs d -dimensional en el UV y una CFT diferente en el IR, desencadenada por un operador relevante,

$$S = S_{CFT} + \int d^d x g \mathcal{O}(x). \quad (4.4.1)$$

Aquí \mathcal{O} es un operador escalar de la CFT_{UV} con dimensión conforme $\Delta_{UV} < d$ y g es una constante de acoplamiento. Al final del flujo, \mathcal{O} se hace irrelevante, con dimensión $\Delta_{IR} > d$ con respecto a la CFT IR. La traza $\Theta(x) = T^\mu_\mu(x)$ del tensor de energía momentos se anula en una CFT, y se hace no trivial a lo largo del flujo. Nuestro objetivo es calcular su correlador, o función de dos puntos $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$. En particular queremos evaluar

$$\int d^d x x^2 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle, \quad (4.4.2)$$

y mostrar que da el cambio en la carga central $c_{UV} - c_{IR}$ en $d = 2$, y, para $d > 2$, nos da proporcional al término de área de la EE de una región mucho más grande que la escala que caracteriza al flujo [33].

4.4.1. Descripción gravitatoria

Un modelo para el dual gravitatorio de un flujo del GR corresponde a una pared de dominio en la dirección holográfica radial en $(d+1)$ -dimensiones que interpole entre un espacio de AdS de radio L_{UV} cuando $r \rightarrow \infty$ y otro espacio AdS con radio L_{IR} cuando $r \rightarrow -\infty$. Estos puntos finales de la pared de dominio son duales a las CFT_{UV} y CFT_{IR} de arriba. Por otra parte, la deformación relevante de la teoría CFT_{UV} por un operador escalar \mathcal{O} significa que la solución gravitatoria en el bulk que interpola entre los espacios AdS tiene como fuente un campo escalar sometido a un potencial no trivial $V(\phi)$.

Este flujo holográfico, o esta QFT, puede entonces describirse por una acción de Einstein-Hilbert acoplada a un campo escalar,²

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2\kappa^2} R^{(d+1)} + \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + V(\phi) \right). \quad (4.4.3)$$

Esta acción tiene algunos términos de borde adicionales que discutiremos en §4.4.2. Es posible agregar términos de más derivadas o más campos materiales a este análisis, pero nos restringiremos por simplicidad al caso enunciado.

²Trabajamos en esta sección en coordenadas Euclídeas, $\kappa^2 = 8\pi G_N^{(d+1)}$, con $G_N^{(d+1)}$ la constante de Newton en $d+1$ dimensiones.

Consideremos un potencial que tiene un máximo en $\phi = 0$ y admite una expansión

$$V = V_{UV} + \frac{1}{2}m_{UV}^2\phi^2 + \dots \quad (4.4.4)$$

Hay además un mínimo en $\phi = \phi_0$,

$$V = V_{IR} + \frac{1}{2}m_{IR}^2(\phi - \phi_0)^2 + \dots \quad (4.4.5)$$

La solución tipo pared de dominio viene descrita por

$$ds^2 = dr^2 + e^{2A(r)}\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad \phi = \phi(r). \quad (4.4.6)$$

El factor de deformación $A(r)$ y el perfil del campo escalar $\phi(r)$ satisfacen las ecuaciones de Einstein

$$\frac{1}{2\kappa^2}d(d-1)\dot{A}^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad \frac{1}{\kappa^2}(d-1)\ddot{A} = -\dot{\phi}^2, \quad (4.4.7)$$

y la ecuación de movimiento para el campo escalar (que se sigue de la de arriba)

$$\ddot{\phi} + d\dot{A}\dot{\phi} - \partial_\phi V = 0. \quad (4.4.8)$$

Los puntos denotan derivadas con respecto a r .

Para $r \rightarrow \infty$ la pared de dominio comienza cerca de $\phi = 0$ que, por las ecuaciones de movimiento, dan una solución AdS de radio L_{UV}

$$A(r) \sim \frac{r}{L_{UV}}, \quad -V_{UV} = \frac{d(d-1)}{2\kappa^2 L_{UV}^2}. \quad (4.4.9)$$

El punto final de la pared de dominio ocurre cuando ϕ alcanza el mínimo en ϕ_0 , lo que corresponde en nuestras coordenadas a $r \rightarrow -\infty$, con

$$A(r) \sim \frac{r}{L_{IR}}, \quad -V_{IR} = \frac{d(d-1)}{2\kappa^2 L_{IR}^2}. \quad (4.4.10)$$

De acuerdo con el diccionario AdS/CFT, la relación de la dimensión Δ_{UV} del operador \mathcal{O} de la CFT viene dado por

$$m_{UV}^2 L_{UV}^2 = \Delta_{UV}(\Delta_{UV} - d). \quad (4.4.11)$$

Nótese que $m_{UV}^2 < 0$ pues \mathcal{O} es relevante. En el IR tenemos de forma análoga

$$m_{IR}^2 L_{IR}^2 = \Delta_{IR}(\Delta_{IR} - d), \quad (4.4.12)$$

con $\Delta_{IR} > d$ y $m_{IR}^2 > 0$.

No necesitaremos el perfil explícito de la pared de dominio para nuestro cálculo, pero podemos dar más detalles del comportamiento de $\phi(r)$ en las dos regiones asintóticamente AdS. Primero, escribamos la solución para un campo escalar masivo en AdS,

$$\phi(r) = \phi_0 e^{-(d-\Delta)\frac{r}{L}} + \phi_\Delta e^{-\Delta\frac{r}{L}}. \quad (4.4.13)$$

Nos restringimos al caso de una perturbación relevante en el rango

$$\Delta_{UV} > d/2, \quad (4.4.14)$$

lo que corresponde a la cuantización estandar³. En este caso, el primer término domina para r grande y es dual a encender un acoplamiento g en (4.4.1). El segundo término es dual al valor de expectación $\langle \mathcal{O} \rangle$. Como estamos estudiando flujos del GR debidos a deformaciones relevantes, $\phi_0 \neq 0$ en la región UV de la pared de dominio y esta vendrá descrita por una expresión de la forma

$$\phi(r) = e^{-(d-\Delta_{UV})\frac{r}{L_{UV}}} \left(\phi_{UV}^0 + \phi_\Delta e^{-(2\Delta_{UV}-d)\frac{r}{L_{UV}}} + \phi_2 e^{-2\frac{r}{L_{UV}}} + \dots \right) \quad (4.4.15)$$

para r grande. En la región IR, $r \rightarrow -\infty$, la regularidad de la solución requiere que no haya un término proporcional a $e^{-\Delta_{IR}\frac{r}{L_{IR}}}$, y el perfil es entonces de la forma

$$\phi(r) \approx \phi_{IR}^0 e^{-(d-\Delta_{IR})\frac{r}{L_{IR}}}. \quad (4.4.16)$$

4.4.2. Funciones de correlación holográfica

Antes de pasar al cálculo explícito en la proxima sección, sería útil revisar algunos aspectos del diccionario holográfico que necesitaremos más adelante. Introduciremos también la forma Hamiltoniana de la acción gravitatoria, que nos será útil en el cálculo.

En la aproximación semiclásica de N grande, la correspondencia de AdS/CFT identifica la función de partición de una QFT con la exponencial de la acción en el bulk evaluada en capa de masa (o la función de partición en el bulk en la aproximación de saddle point cuando N es grande), $\log Z_{QFT} = -S_{\text{capa de masa}}$.

Las funciones de correlación de n -puntos $\langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle$ en el borde son obtenidas encendiendo términos de acoplamientos con los valores $\phi_0(x)$ de borde de los campos en el bulk $\phi(x, z)$, $\lim_{z \rightarrow 0} \phi(x, z) = \phi_0(x) z^{d-\Delta}$, evaluando la acción en el bulk en capa de masa y tomando n derivadas respecto de las fuentes ϕ_0 , ecuación (2.3.2), [18]. La traza del tensor de energía momentos se acopla con la traza de la métrica en el borde de AdS; y la función de dos puntos de Θ se obtiene variando respecto del factor de

³Para $\Delta_{UV} < d/2$, la llamada cuantización alternativa es la que debe ser usada. Según nuestro conocimiento, los flujos del GR en este rango no están completamente entendidos aún.

deformación de la pared de dominio (4.4.6). La parte conectada esta función de dos puntos viene dada por

$$\langle \Theta(x)\Theta(y) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta}{\delta(\delta A_0(x))} \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S_{\text{capa de masa}}}{\delta(\delta A_0(y))}. \quad (4.4.17)$$

Más en detalle, la métrica en el bulk es perturbada con el valor en el borde δA_0 ,

$$h_{\mu\nu}(x, r) = e^{2A(r)+2\delta A(x,r)} \delta_{\mu\nu}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta A(x, r) = \delta A_0(x). \quad (4.4.18)$$

A este orden, necesitamos resolver entonces las ecuaciones en el bulk linealizadas y permitiendo una perturbación $\delta A_0(x)$.

Hay algunos detalles que complican este cálculo. Primero, en contraste con el modo gravitatorio tensorial -que es dual a la parte sin traza del tensor de energía momentos, de dimensión fija d - el modo métrico escalar se mezcla con las fluctuaciones del campo escalar. Ambos están relacionados por las ecuaciones de Einstein y equivalen a un sistema complicado de ecuaciones. Desde la perspectiva del dual (QFT en el borde de AdS) esto refleja el hecho, mencionado anteriormente, de que Θ no es un operador independiente, sino que satisface $\Theta(x) = \beta_g \mathcal{O}(x)$. Un problema similar ocurre en perturbaciones en inflación, por lo que será útil adaptar algunos de los métodos de cosmología a nuestra situación.

El segundo problema es cómo resolver las ecuaciones linealizadas del bulk. La solución tiene dos constantes arbitrarias cerca del UV, como en (4.4.13). La constante que multiplica a la serie subdominante (o sea, al término tipo valor de expectación en el vacío ϕ_Δ en (4.4.13)) es fijada pidiendo regularidad en el IR $r \rightarrow -\infty$. Esto es fácil de implementar en un espacio AdS puro, pero se convierte en un problema no local y no trivial en el caso de la pared de dominio. Además, queremos imponer esta condición de regularidad para cualquier solución de la pared de dominio, de forma de poder hacer consideraciones generales sobre $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$. Abordaremos este problema en §4.5, donde encontraremos resultados analíticos para flujos arbitrarios en el límite de momentos pequeños, así como en el límite de momentos grandes.

La acción (4.4.3) diverge cuando es evaluada en capa de masa, debido a contribuciones en la región UV. Afortunadamente la solución a este problema es bien entendida usando renormalización holográfica [155, 156]. El método consiste en hacer la acción en capa de masa finita, agregando términos que sean covariantes en las cantidades geométricas del borde. En nuestro caso, la acción incluiría entonces un término de Gibbons-Hawking. El contratérmino sería

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2\kappa^2} R^{(d+1)} + \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + V(\phi) \right) - \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{h} K + S_{ct}. \quad (4.4.19)$$

Aquí K es la traza de la curvatura extrínseca de la superficie del borde (discutida debajo en más detalle), y

$$S_{ct} = \frac{d-1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{h} \left(\frac{1}{L_{UV}} + \frac{L_{UV}}{2(d-1)(d-2)} R^{(d)} + \frac{\kappa^2}{2} \frac{d-\Delta}{d-1} \phi^2 + \dots \right). \quad (4.4.20)$$

Los primeros dos contratérminos fueron encontrados en [157] imponiendo la condición de un tensor de energía-momentos finito; y el término proporcional a ϕ^2 cancela el término de borde que surge de integrar por partes al evaluar la acción de campo escalar en capa de masa.

4.4.3. Formulación Hamiltoniana

Para calcular la acción a orden cuadrático, será conveniente usar la forma Hamiltoniana de la acción de Einstein-Hilbert [158]. Al hacer esto, varios aspecto del GR holográfico se simplifican, como fue notado en [159–161], y más recientemente en [162–164].⁴

Uno comienza con la descomposición ADM a lo largo de la dirección radial holográfica

$$ds^2 = N(x, r)^2 dr^2 + h_{\mu\nu}(x, r)(dx^\mu + N^\mu(x, r)dr)(dx^\nu + N^\nu(x, r)dr). \quad (4.4.21)$$

La curvatura extrínseca de una superficie $r = \text{const}$ viene dada por

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{\mu\nu} - \nabla_\mu N_\nu - \nabla_\nu N_\mu). \quad (4.4.22)$$

Los puntos denotan derivadas respecto al radio r , ∇_μ es la derivada covariante con respecto a $h_{\mu\nu}$, y $K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$.

La acción $S = S_{grav} + S_{materia} + S_{ct}$ en términos de las variable ADM es

$$\begin{aligned} S_{grav} &= -\frac{1}{2\kappa^2} \int dr d^d x \sqrt{h} N (R^{(d)} + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}), \\ S_{materia} &= \int dr d^d x \sqrt{h} N \left(\frac{1}{2N^2} (\dot{\phi} - N^\mu \partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

El término de borde de Gibbons-Hawking se cancela cuando escribimos el escalar de curvatura $d+1$ -dimensional en términos de las cantidades d -dimensionales (ver por ejemplo [166]). En la forma de primer orden, en la que las variable y sus momentos canónicos conjugados son tratadas como variables independientes, la acción es

$$S = \int dr d^d x \sqrt{h} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \Pi^{\mu\nu} \dot{h}_{\mu\nu} + \Pi_\phi \dot{\phi} + N\mathcal{H} + N_\mu P^\mu \right) + S_{ct}, \quad (4.4.24)$$

⁴Aquí seguimos las convenciones de [165].

con

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{d-1} (\Pi_\mu^\mu)^2 - \Pi_{\mu\nu}^2 \right) - \frac{1}{2} \Pi_\phi^2 + V(\phi) - \frac{1}{2\kappa^2} R^{(d)} + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \\ P^\mu &= \frac{1}{\kappa^2} \nabla_\nu \Pi^{\mu\nu} - \Pi_\phi \nabla^\mu \phi.\end{aligned}\tag{4.4.25}$$

Los campos N y N_μ son multiplicadores de Lagrange que imponen los vínculos

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta N} = \mathcal{H} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta N^\mu} = P_\mu = 0.\tag{4.4.26}$$

Además, las ecuaciones de movimiento para $\Pi_{\mu\nu}$ y Π_ϕ nos dan las relaciones

$$\Pi_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} K, \quad \Pi_\phi = \frac{1}{N} \left(\dot{\phi} - N^\mu \partial_\mu \phi \right),\tag{4.4.27}$$

que reproduce los momentos calculados de (4.4.23).

4.5. La función de dos puntos del tensor de energía momentos

En esta sección presentamos el siguiente resultado técnico: el cálculo de $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle$. Procedemos en tres pasos. Primero determinamos en §4.5.1 la acción para la fluctuación escalar de la métrica a segundo orden. Luego, en §4.5.2, mostramos cómo resolver las ecuaciones de movimiento correspondientes imponiendo la condición de regularidad en el IR a través de un procedimiento de pegado. Finalmente, calculamos la función de dos puntos en una expansión perturbativa alrededor de distancias grandes en §4.5.3. Terminamos estableciendo la regla de suma holográfica en §4.5.4.

4.5.1. Acción cuadrática

Para calcular $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle$, debemos permitir una métrica fluctuante, $h_{\mu\nu}(x, r) = e^{2A(r)+2\delta A(x,r)} \delta_{\mu\nu}$, y luego evaluar la acción en capa de masa a orden cuadrático en δA .

Sin una buena elección del gauge, las ecuaciones de Einstein conducen a un sistema complicado de ecuaciones diferenciales que mezclan δA y $\delta \phi$. Esto se debe en parte a los vínculos $\delta G_{\mu r} = \delta T_{\mu r}$ y $\delta G_{00} = \delta T_{00}$ que relacionan ambos modos. Una posibilidad sería trabajar en términos de variables invariantes de gauge; sin embargo, es más conveniente trabajar en el gauge

$$h_{\mu\nu}(x, r) = e^{2A(r)+2\delta A(x,r)} \delta_{\mu\nu}, \quad \phi(x, r) = \phi(r),\tag{4.5.1}$$

en la que todas las fluctuaciones del campo escalar se anulan. Como se mostró en

un problema similar de una perturbación escalar en inflación en [152], las ecuaciones se simplifican notablemente con esta elección. Nótese que en este gauge, N y N_μ en (4.4.21) se convierten en no triviales. Este gauge fue también usado recientemente en un problema holográfico relacionado, en [153], y ha motivado la forma en la que hemos elegido atacar este problema.

La acción cuadrática para δA solo requiere que N y N_μ estén a primer orden en δA , pues los términos de segundo orden aparecen multiplicando a los vínculos \mathcal{H} y P^μ , que se anulan pues están evaluados sobre la solución de fondo. A primer orden trabajamos con el ansatz

$$N = 1 + \delta N, \quad N_\mu = e^{2A(r)} \partial_\mu \delta\psi, \quad (4.5.2)$$

que veremos resolverá los vínculos. En este caso,

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{N} \left((\dot{A} + \delta\dot{A}) h_{\mu\nu} - e^{2A(r)} \partial_\mu \partial_\nu \delta\psi \right), \\ K &= \frac{1}{N} \left(d(\dot{A} + \delta\dot{A}) - \square \delta\psi \right), \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

donde $\square f \equiv \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f$.

Consideremos primero el vínculo de momentos, $\nabla^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$. De (4.4.27) y (4.5.3), obtenemos

$$\delta N = \frac{\delta\dot{A}}{\dot{A}}. \quad (4.5.4)$$

La solución al vínculo Hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$ es más complicada. Primero evaluamos el escalar de curvatura para $h_{\mu\nu}$:

$$R^{(d)} = -(d-1)e^{-2(A+\delta A)} (2\square\delta A + (d-2)\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A \partial_\nu \delta A), \quad (4.5.5)$$

que es válido a todos los órdenes en δ . Sustituyendo este resultado y (4.5.3) en (4.4.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{d-1}{2\kappa^2} \frac{1}{N^2} \left(d(\dot{A} + \delta\dot{A})^2 - 2(\dot{A} + \delta\dot{A}) \square \delta\psi \right) \\ &+ \frac{d-1}{2\kappa^2} e^{-2(A+\delta A)} \left(2\square\delta A + (d-2)(\partial_\mu \delta A)^2 \right) - \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi). \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Como un chequeo, a orden cero en la fluctuación

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2\kappa^2} d(d-1) \dot{A}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.5.7)$$

reproduce las ecuaciones clásicas de movimiento (4.4.7). Expandiendo al siguiente orden

en la fluctuación se obtiene una ecuación que determina $\square\delta\psi$,

$$\square\delta\psi = -\frac{\ddot{A}}{\dot{A}}\delta\dot{A} + e^{-2A}\frac{\square\delta A}{\dot{A}} + O(\delta^2), \quad (4.5.8)$$

donde hemos usado el valor de δN en (4.5.4), y hemos eliminado $\dot{\phi}^2$ en favor de \ddot{A} usando (4.4.7).

Sustituimos ahora (4.5.4) y (4.5.8) en (4.4.24) y expandimos a orden cuadrático en δA . Nótese que, a este orden, $N_\mu P^\mu = 0$, y $N\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(2)}$. Después de integrar por partes, los términos $S_{grav} + S_{materia}$ de la acción expandida a orden cuadrático puede ser llevada a la forma

$$S^{(2)} = -\frac{d-1}{2\kappa^2} \int dr d^d x \quad (4.5.9)$$

$$\left[e^{dA} \frac{\ddot{A}}{\dot{A}^2} \left(\delta\dot{A}^2 + e^{-2A} (\partial_\mu \delta A)^2 \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{(d-2)A}}{\dot{A}} (\partial_\mu \delta A)^2 + d^2 e^{dA} \dot{A} (\delta A)^2 \right) \right].$$

Necesitamos también incluir los contratérminos (4.4.20) de la renormalización holográfica. Expandiendo S_{ct} a orden cuadrático obtenemos una contribución que cancela los términos de borde en (4.5.9),⁵ de tal forma que el resultado final para la acción cuadrática es

$$S = \frac{d-1}{2\kappa^2} \int dr d^d x e^{dA} \varepsilon(r) \left(\delta\dot{A}^2 + e^{-2A} (\partial_\mu \delta A)^2 \right), \quad (4.5.10)$$

donde hemos definido

$$\varepsilon(r) \equiv -\frac{\ddot{A}}{\dot{A}^2}. \quad (4.5.11)$$

Por lo tanto, transformando a modos de Fourier, necesitamos resolver la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dr} \left(e^{dA} \varepsilon(r) \frac{d\delta A}{dr} \right) - e^{(d-2)A} \varepsilon(r) p^2 \delta A = 0 \quad (4.5.12)$$

con la condición de borde

$$\delta A(p, r_{UV}) = \delta A_0(p) \quad (4.5.13)$$

y luego calcular la segunda derivada con respecto a δA_0 de la acción en capa de masa. Evaluando sobre las ecuaciones de movimiento, solo el término que resulta de integrar por partes sobrevive en (4.5.10), y

$$S_{\text{capa de masa}} = \frac{d-1}{2\kappa^2} \int d^d x e^{dA} \varepsilon(r) \delta A \partial_r \delta A \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (4.5.14)$$

⁵En particular, los primeros dos términos en la expansión de \dot{A} cerca del borde cancelan el primer y tercer término en la parte de contratérminos en la acción. Esto se repite a ordenes superiores.

4.5.2. Soluciones y pegado de soluciones

Conviene ahora trabajar en las coordenadas $z \in (0, \infty)$,

$$dr = -a(z)dz, \quad e^{A(r)} = a(z), \quad (4.5.15)$$

en términos de la cual

$$S = \frac{d-1}{2\kappa^2} \int d^d x dz a^{d-1}(z) \varepsilon(z) ((\partial_z \delta A)^2 + (\partial_\mu \delta A)^2), \quad (4.5.16)$$

y

$$\frac{d}{dz} \left(a^{d-1}(z) \varepsilon(z) \frac{d\delta A}{dz} \right) - a^{d-1}(z) \varepsilon(z) p^2 \delta A(z) = 0. \quad (4.5.17)$$

El flujo radial comienza en el UV debido a un operador relevante, o, en el lenguaje gravitatorio,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \phi(z) \approx \phi_{UV}^0 z^{d-\Delta_{UV}}, \quad (4.5.18)$$

con $\Delta_{UV} < d$. También tomamos $\Delta_{UV} > d/2$ para evitar sutilezas con la cuantización alternativa. En el IR este operador se hace irrelevante, con dimensión $\Delta_{IR} > d$, y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) \approx \phi_{IR}^0 z^{-(\Delta_{IR}-d)}. \quad (4.5.19)$$

La regularidad en el IR requiere que no haya un modo proporcional a $z^{\Delta_{IR}}$. Tomamos la aproximación en el UV como válida para $z \lesssim z_{UV}$, y la aproximación en el IR como válida en $z \gtrsim z_{IR}$. Tomaremos z_{UV} como un regulador en el UV, y haremos el límite $z_{UV} \rightarrow 0$ luego de sustraer apropiadamente las divergencias. Por otro lado, es importante tener en cuenta que z_{IR} , a pesar de ser mucho mayor que la escala de masa en el flujo del GR, es una cantidad finita.

Necesitamos $\varepsilon(z)$ en las regiones UV e IR. Cerca de las regiones AdS, las ecuaciones del movimiento para el campo de fondo (4.4.7) dan

$$\varepsilon(z) \approx -\frac{d}{2V} \dot{\phi}^2. \quad (4.5.20)$$

Usando

$$\dot{\phi} \approx -\frac{d-\Delta}{L} \phi_0 z^{d-\Delta}, \quad (4.5.21)$$

y recordando la relación (4.4.9) entre V y el radio de AdS, obtenemos

$$\varepsilon(z) \approx \eta z^{2(d-\Delta)}, \quad \eta \equiv (\kappa \phi_0)^2 \frac{(d-\Delta)^2}{d-1}. \quad (4.5.22)$$

Para el factor de deformación, es suficiente tomar el comportamiento dominante de AdS, $a(z) \approx L/z$.

Aquí notamos una diferencia importante con el trabajo de [153]. En ese trabajo se aproximó $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ en el UV y el IR, tomándose $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ al final. De (4.5.22), esto corresponde al límite $\Delta_{UV,IR} \rightarrow d$. Por ello, esa forma de hacer las cosas solo se aplica a flujos del GR desencadenados por un operador casi marginal. Aquí no queremos imponer esa restricción, y usaremos (4.5.22). De hecho, encontraremos que la dependencia en z en (4.5.22) tiene consecuencias importante para establecer la regla de suma holográfica.

Podemos resolver (4.5.17) en las regiones asintóticas. En las regiones AdS del UV y el IR,

$$(z^{1-2\alpha}\delta A')' - p^2 z^{1-2\alpha}\delta A = 0, \quad (4.5.23)$$

donde las primas significan derivadas respecto a z , y hemos definido

$$\alpha \equiv \Delta - \frac{d}{2}. \quad (4.5.24)$$

La solución general es de la forma

$$\delta A = (pz)^\alpha (c_1 I_\alpha(pz) + c_2 K_\alpha(pz)). \quad (4.5.25)$$

Nótese que $\alpha > 0$ en la región UV debido a (4.4.14); α es también positiva en el IR, porque el operador se convierte en irrelevante cuando el flujo se acerca al punto fijo IR. En el IR solo K_α es regular. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \delta A_{UV}(z) &= (pz)^{\alpha_{UV}} \left(\frac{2^{1-\alpha_{UV}}}{\Gamma(\alpha_{UV})} h_0(p) K_{\alpha_{UV}}(pz) + 2^{\alpha_{UV}} \Gamma(1 + \alpha_{UV}) h_1(p) I_{\alpha_{UV}}(pz) \right), \\ \delta A_{IR}(z) &= D_1(p) (pz)^{\alpha_{IR}} K_{\alpha_{IR}}(pz), \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

con factores arbitrarios h_0 , h_1 y D_1 dependientes del momento.

Aquí h_0 es la fuente para Θ en la frontera, y el objetivo es determinar h_1/h_0 . Para su futuro uso, escribimos la expansión de pz pequeña en ambos límites,

$$\begin{aligned} \delta A_{UV}(z) &= h_0(p) + \left(\frac{\Gamma(-\alpha_{UV})}{4^{\alpha_{UV}} \Gamma(\alpha_{UV})} h_0(p) + h_1(p) \right) (pz)^{2\alpha_{UV}} + \dots \\ \delta A_{IR}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha_{IR})}{2^{1-\alpha_{IR}}} D_1(p) + \frac{\Gamma(-\alpha_{IR})}{2^{1+\alpha_{IR}}} D_1(p) (pz)^{2\alpha_{IR}} + \dots \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

En general no es posible hallar una solución analítica para todo p ⁶. Sin embargo, para evaluar (4.0.8), solo necesitamos el correlador para momentos chicos y hasta orden cuadrático p^2 . Esto constituye una gran simplificación para lo que sigue, y motiva la búsqueda de una solución perturbativa alrededor de $p = 0$.

⁶Para algunas soluciones exactas en modelos microscópicos específicos ver por ejemplo [167, 168].

Para $p = 0$ tenemos la solución exacta

$$\delta A_{p=0}(z) = A_2 + A_1 \int_{z_{IR}}^z \frac{dz'}{a^{d-1}(z')\varepsilon(z')}, \quad (4.5.28)$$

que usamos para construir una solución en potencias de p^2 ,

$$\delta A_{pert}(z) = A_2(1 + p^2 g_1(z) + \dots) + A_1(f_0(z) + p^2 f_1(z) + \dots). \quad (4.5.29)$$

Hemos definido

$$f_0(z) = \int_{z_{IR}}^z \frac{dy}{a^{d-1}(y)\varepsilon(y)}, \quad f_1(z) = \int_{z_{IR}}^z \frac{dy_1}{a^{d-1}(y_1)\varepsilon(y_1)} \int_{z_{IR}}^{y_1} dy_2 a^{d-1}(y_2)\varepsilon(y_2) f_0(y_2) \quad (4.5.30)$$

y

$$g_1(z) = \int_{z_{IR}}^z \frac{dy_1}{a^{d-1}(y_1)\varepsilon(y_1)} \int_{z_{IR}}^{y_1} dy_2 a^{d-1}(y_2)\varepsilon(y_2). \quad (4.5.31)$$

Potencias mayores en p^2 pueden ser obtenidas recursivamente,

$$\begin{pmatrix} f_n(z) \\ g_n(z) \end{pmatrix} = \int_{z_{IR}}^z \frac{dy_1}{a^{d-1}(y_1)\varepsilon(y_1)} \int_{z_{IR}}^{y_1} dy_2 a^{d-1}(y_2)\varepsilon(y_2) \begin{pmatrix} f_{n-1}(y_2) \\ g_{n-1}(y_2) \end{pmatrix}. \quad (4.5.32)$$

La solución para toda z puede ser encontrada cuando las expresiones anteriores se superponen. Esto ocurre a momento chico, $p z_{UV} \ll 1$ y $p z_{IR} \ll 1$ ⁷. En este régimen pegamos (4.5.29) con (4.5.26) y obtenemos la restricción que impone la regularidad en el IR sobre la expansión UV. Este procedimiento de pegado fue introducido en [169]; ver también [170, 171]. Empezamos desde el IR. Notemos que hemos definido todas las integrales f_i y g_i en (4.5.29) de tal manera que se anulen en $z = z_{IR}$. Por lo tanto, pegando las dos soluciones y sus derivadas tenemos

$$\begin{aligned} \delta A_{pert}(z_{IR}) &= A_2 = \delta A_{IR}(z_{IR}), \\ \delta A'_{pert}(z_{IR}) &= f'_0(z_{IR}) A_1 = \delta A'_{IR}(z_{IR}), \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

y con ello

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{f'_0(z_{IR})} \frac{\delta A'_{IR}(z_{IR})}{\delta A_{IR}(z_{IR})}. \quad (4.5.34)$$

Repitiendo este procedimiento en el UV obtenemos

$$\begin{aligned} (f'_0 + p^2 f'_1 + \dots) A_1 + (p^2 g'_1 + \dots) A_2 &= \delta A'_{UV}, \\ (f_0 + p^2 f_1 + \dots) A_1 + (1 + p^2 g_1 + \dots) A_2 &= \delta A_{UV}, \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

⁷Al final del cálculo $z_{UV} \rightarrow 0$, por lo que $p z_{UV} \ll 1$ es inmediato. Por otro lado, z_{IR} es una escala radial finita; dada una z_{IR} fija debemos elegir momentos $p z_{IR} \ll 1$.

y todas las funciones están evaluadas en $z = z_{UV}$. Por lo tanto,

$$\left. \frac{\delta A'_{UV}}{\delta A_{UV}} \right|_{z=z_{UV}} = \frac{(f'_0 + p^2 f'_1 + \dots)(A_1/A_2) + (p^2 g'_1 + \dots)}{(f_0 + p^2 f_1 + \dots)(A_1/A_2) + (1 + p^2 g_1 + \dots)} \Big|_{z=z_{UV}}. \quad (4.5.36)$$

con A_1/A_2 dado por (4.5.34).

En resumen, dado un valor de borde h_0 , encontramos la única solución en serie de potencias para momentos chicos que es regular en el IR. El cociente h_1/h_0 es determinado a partir de (4.5.36).

4.5.3. Cálculo del correlador del tensor de energía momentos

Estamos listos para calcular $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$. Para el correlador conectado⁸ necesitamos el término cuadrático en h_0 :

$$S_{\text{capa de masa}} = -\frac{d-1}{2\kappa^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} a^{d-1}(z_{UV}) \varepsilon(z_{UV}) \left. \frac{\delta A'_{UV}(z_{UV})}{\delta A_{UV}(z_{UV})} h_0(p) h_0(-p) \right|_{z_{UV} \rightarrow 0}. \quad (4.5.37)$$

Entonces,⁹

$$\langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle = \frac{d-1}{\kappa^2} a^{d-1}(z_{UV}) \varepsilon(z_{UV}) \left. \frac{\delta A'_{UV}}{\delta A_{UV}} \right|_{z_{UV} \rightarrow 0} \quad (4.5.38)$$

y esta es la cantidad que obtenemos de la solución pegada (4.5.36). Teniendo en cuenta que $a^{d-1}(z)\varepsilon(z) = 1/f'_0(z)$, llegamos a

$$\langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle = \frac{d-1}{\kappa^2} \frac{(1 + p^2 f'_1/f'_0 + \dots)(A_1/A_2) + (p^2 g'_1/f'_0 + \dots)}{(f_0 + p^2 f_1 + \dots)(A_1/A_2) + (1 + p^2 g_1 + \dots)} \Big|_{z=z_{UV}}. \quad (4.5.39)$$

Este es nuestro resultado final para el correlador de $\Theta(p)$ a momentos pequeños, y es el resultado técnico principal de esta sección.

Para entender la dependencia con el momento de este correlador, expandimos (4.5.34) para $p z_{IR}$ pequeño, obteniéndose

$$\frac{A_1}{A_2} \propto p^{2\Delta_{IR}-d}. \quad (4.5.40)$$

Por lo tanto, (4.5.39) contiene términos que no son analíticos en p (para un Δ_{IR} genérico) y de la forma $p^{2\Delta_{IR}-d}(1 + p^2 + \dots)$, conjuntamente con términos analíticos en p^2 . Vemos primero la parte no analítica,

$$\langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle = -\frac{1}{2^{2\alpha_{IR}}} \frac{\Gamma(1 - \alpha_{IR})}{\Gamma(\alpha_{IR})} \left((d - \Delta_{IR}) L_{IR}^{\frac{d-1}{2}} \phi_{IR}^0 \right)^2 p^{2\Delta_{IR}-d} + \dots \quad (4.5.41)$$

⁸Si \mathcal{O} tiene un valor de espectación, hay una contribución adicional desconectada que aparece como un término lineal en h_0

⁹Estamos usando la notación estandar $\langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle = \int d^d x e^{ipx} \langle \Theta(0)\Theta(x) \rangle$.

Aquí ϕ_{IR}^0 viene dado en términos del escalar $\phi(z) \approx \phi_{IR}^0 z^{-(\Delta_{IR}-d)}$ de la pared de dominio a z grande. Este comportamiento coincide con el esperado de la relación operatorial $\Theta(x) = \beta_g \mathcal{O}(x)$ para una perturbación del punto fijo por un término $\int d^d x g \mathcal{O}(x)$ en la acción, donde $\Delta(\mathcal{O}) = \Delta_{IR}$. De hecho, identificando el acoplamiento con la fuente en el lado holográfico, $g = L^{\frac{d-1}{2}} \phi_{IR}^0$, la función clásica β es $\beta_g \approx (\Delta_{IR} - d)g$, y por ello

$$\langle \Theta(p) \Theta(-p) \rangle = \beta_g^2 \langle \mathcal{O}(p) \mathcal{O}(-p) \rangle. \quad (4.5.42)$$

Nuestro resultado entonces está de acuerdo con la respuesta en la CFT dual. En el límite de momentos grandes $p z_{IR} \gg 1$, el problema perturbativo está determinado puramente en términos de los datos en el UV: la solución es dominada por el término h_0 y no necesitamos ningún pegado de funciones salvo correcciones exponencialmente pequeñas en h_1 . En este caso encontramos (4.5.41) con el reemplazo $\alpha_{IR} \rightarrow \alpha_{UV}$, de acuerdo nuevamente con la relación operatorial $\Theta(x) = \beta_g \mathcal{O}(x)$ cerca del punto fijo UV.

Veamos ahora los términos analíticos. En el UV las contribuciones analíticas en p^2 son términos de contacto y por ello dependen del esquema de regularización. En nuestro cálculo hemos elegido una regularización específica en términos de la prescripción del GR holográfico descrita anteriormente. Sin embargo, habiéndose elegido un esquema de regularización en el UV, los términos analíticos son físicos en el IR y dependen de propiedades globales del GR, como a continuación exploramos.

Para momentos chicos, la contribución no analítica de A_1/A_2 es subdominante comparada con p^2 , pues $\Delta_{IR} > d$. A primer orden en p^2 obtenemos

$$a^{d-1}(z_{UV}) \varepsilon(z_{UV}) \frac{\delta A'_{UV}}{\delta A_{UV}} \approx p^2 \frac{g'_1(z_{UV})}{f'_0(z_{UV})} = p^2 \int_{z_{IR}}^{z_{UV}} dz a^{d-1}(z) \varepsilon(z). \quad (4.5.43)$$

Desde el punto de vista del procedimiento de pegado, el término p^2 es dominado por la primera corrección perturbativa dada por $g_1(z)$ en (4.5.29). Este otro punto en donde diferimos de [153], que se enfoca en el término p^{010} . Teniendo esto en cuenta obtenemos

$$\int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = \frac{2d(d-1)}{\kappa^2} \int_0^\infty dz a^{d-1}(z) \varepsilon(z), \quad (4.5.44)$$

donde el factor de $2d$ viene de $-\nabla_p^2$, la transformada de Fourier de x^2 aplicada a p^2 . En términos de la variable r introducida anteriormente,

$$\int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = \frac{2d(d-1)}{\kappa^2} \int dr e^{(d-2)A(r)} \left(-\frac{\ddot{A}(r)}{\dot{A}(r)^2} \right). \quad (4.5.45)$$

¹⁰Detalles o ambigüedades similares fueron identificados en otros contextos por [170, 171].

Integrando por partes se llega a

$$\int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = \frac{2d(d-1)}{\kappa^2} \frac{e^{(d-2)A(r)} \dot{A}(r)}{\big|_{r_{IR}}^{r_{UV}}} - \frac{2d(d-1)(d-2)}{\kappa^2} \int dr e^{(d-2)A(r)}. \quad (4.5.46)$$

4.5.4. La regla de suma holográfica

Estamos listo para establecer la regla de suma (4.0.8). Para $d = 2$, (4.5.46) nos da el Teorema-c,

$$\int d^2 x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = \frac{4}{\kappa^2} \frac{1}{\dot{A}(r)} \big|_{r_{IR}}^{r_{UV}} = \frac{4}{\kappa^2} (L_{UV} - L_{IR}) = \frac{1}{3\pi} (c_{UV} - c_{IR}), \quad (4.5.47)$$

donde en el último paso hemos usado la relación holográfica estandar en $d = 2$ (2.3.4).

Para $d > 2$, el primer término en (4.5.46) es divergente UV, mientras que el segundo término es proporcional a la entropía de entrelazdo holográfica de una superficie plana. Esta entropía viene dada por la fórmula de Ruy-Takayanagi $\text{area}(m_{\mathcal{A}})/(4G_N^{(d+1)})$, con $\text{area}(m_{\mathcal{A}})$ el área de la superficie mínima en el bulk de codimensión 2 (o $(d-1)$ -dimensional) anclada a una superficie de entrelazado $(d-2)$ -dimensional en el borde de AdS. Para una superficie de entrelazado plana, la superficie mínima del bulk $m_{\mathcal{A}}$ se extiende como un plano recto en la dirección holográfica r , y la entropía es

$$S_{EE} = \frac{A_{\parallel}}{4G_N^{(d+1)}} \int dr e^{(d-2)A(r)}. \quad (4.5.48)$$

Usando $\kappa^2 = 8\pi G_N^{(d+1)}$ en (4.5.46), tenemos que

$$-\frac{\pi}{d(d-1)(d-2)} \int d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = \frac{S_{EE}}{A_{\parallel}} - \frac{1}{4G_N^{(d+1)}(d-2)} \frac{e^{(d-2)A(r)} \dot{A}(r)}{\big|_{r=r_{UV}}}. \quad (4.5.49)$$

Esta es la realización holográfica de la relación (4.0.8).

El segundo término en el miembro derecho da una parte divergente sobre el borde que cancela exactamente el término divergente principal en el área. Esto es necesario por consistencia, dado que para $\Delta < (d+2)/2$ el miembro izquierdo de (4.5.49) es finito, mientras que el área es finita en este caso una vez que la divergencia principal fue sustraída. El término constante universal no sufre correcciones por este término de borde que solo contiene potencias fraccionarias de z para Δ genéricos. Potencias de z en el término de borde tampoco corrigen el término logarítmico cuando este está presente en la entropía. En este caso el término constante sí se corrige, pero no es más universal.

Es interesante notar que con la elección del cutoff holográfico dado por z_{UV} , incluso

los términos divergentes coinciden en ambos lados de (4.5.49).

4.6. Aplicaciones

En esta sección exploramos algunas de las consecuencias físicas y aplicaciones de la regla holográfica de suma (4.5.46), (4.5.49). Para entender mejor el rol del regulador holográfico, comparamos esta regularización con la que se obtiene de la información mutua, §4.6.1. En §4.6.2 discutimos cómo la unitariedad, o su versión Euclídea, la positividad de reflexión, de la teoría del borde se codifica en la teoría del bulk. Mostraremos que en el límite de N grande la positividad de reflexión es equivalente a la estabilidad de la acción gravitatoria. Aplicamos esto a la densidad espectral de $\Theta(x)$, y mostramos que la condición de energía nula y la regularidad de la solución nos dan la unitariedad. Discutimos en §4.6.3 la estructura de los términos de orden p^d en el correlador holográfico de $\Theta(x)$.

4.6.1. Regularización con la información mutua

Una dificultad para implementar la regla de suma (4.0.8) en QFT es que, en general, ambos miembros son divergentes. Hemos encontrado que el cutoff holográfico $z = z_{UV}$ regulariza simultáneamente a la EE y al correlador $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$, y hace que la igualdad (4.0.8) sea válida incluso para los términos no universales. Para comprobar que el término universal en la EE realmente no cambia al cambiar la regularización, usamos la regularización de la EE dada por la información mutua, que fue discutida en la Sección 2.2.9.

$$S(A) = \frac{1}{2} \lim_{\partial A \rightarrow \partial B} I(A, B) . \quad (4.6.1)$$

Tomamos los bordes de A y B como dos planos paralelos separados por una distancia l . $S(A \cup B)$ corresponde a la entropía de la franja delgada de ancho l . Holográficamente, tenemos que

$$I(A, B) = \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} (2A_{\text{plano}} - A_s) , \quad (4.6.2)$$

donde A_{plano} es el área de la superficie mínima correspondiente a un plano, y A_s la superficie mínima en el bulk correspondiente a la franja.

Debe ser que el término constante (o logarítmico) en la EE es $1/2$ del término constante (o logarítmico) en la información mutua. Esto mostraría la universalidad de estos términos, independientemente de posibles divergencias no analíticas. Escencialmente, la entropía de la franja no corrige los términos universales, ya que tiene solo información del UV y no de todo el flujo del GR.

El argumento general es simple. Para l suficientemente pequeño, la superficie mínima en el bulk con borde en la franja no penetra mucho en el bulk, y solo siente la

métrica de un AdS perturbado. Esta métrica puede escribirse como la de AdS más correcciones en la forma de potencias de z , comenzando con $z^{2(d-\Delta)}$. La posición y área de la superficie mínima pueden calcularse perturbativamente en estas correcciones a la métrica, y el área vendrá expresada como una serie en función del cutoff UV $\delta = z_{UV}$ y el ancho de la franja l . La parte divergente en δ debe cancelar exactamente las divergencias en $2A_{\text{plano}}$ en (4.6.2), obteniéndose una información mutua finita. El resto de las contribuciones a la entropía de la franja pueden organizarse como una serie en l . Para un valor genérico de Δ , las potencias de l son, o bien menores que cero (contribuyendo a la parte divergente), o bien positivas, y pueden despreciarse en el límite $l \rightarrow 0$. En cualquier caso el término constante de A_{plano} no se modifica. Este, en contraste con la entropía de la franja, contiene información de todo el flujo del GR y la métrica en el interior del bulk. Para algunos valores especiales de Δ , podría ocurrir un término z^0 en la entropía de la franja. Sin embargo, el área de la superficie mínima es una integral en z , y un término de orden cero vendría de $\int dz/z$, dando un logaritmo. En este caso particular, el término logarítmico tiene que venir en la combinación $\log(l/\delta)$, pues la integral en z ocurre entre el cutoff δ y un valor máximo en z que es proporcional al ancho de la franja l . Este término $\log(\delta)$ debe ser cancelado por el término logarítmico en $2A_{\text{plano}}$, con lo cual, el término logarítmico $\log(\delta)$ en la entropía del plano tiene exactamente el mismo coeficiente que el término $\log(l)$ en la información mutua.

Hagamos un cálculo simple para ilustrar esta idea, expandiendo la métrica cerca de AdS hasta el primer orden en la serie perturbativa y calculando la entropía de la franja a este orden.

La dependencia de A_s en el ancho l de la franja se obtiene de resolver

$$A_s = 2L_{UV}^{d-1} A_{\parallel} \frac{1}{\tilde{z}^{*(d-2)}} \int_{\delta/\tilde{z}^*}^1 dv \frac{1}{v^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{f(\tilde{z}^*v)}\sqrt{1-v^{2(d-1)}}}, \quad (4.6.3)$$

$$l = 2\tilde{z}^* \int_0^1 dv \frac{v^{d-1}}{\sqrt{f(\tilde{z}^*v)}\sqrt{1-v^{2(d-1)}}}. \quad (4.6.4)$$

Aquí δ es un cutoff UV, A_{\parallel} es el área de los planos que definen la franja, y \tilde{z}^* es el máximo en la coordenada z alcanzado por A_s , ver Figura 4.1. $f(\tilde{z})$ define una métrica genérica en el bulk ¹¹

$$ds^2 = \frac{L^2}{\tilde{z}^2} \left(dx^2 + \frac{d\tilde{z}^2}{f(\tilde{z})} \right), \quad (4.6.5)$$

y codifica el comportamiento del flujo del GR de la teoría d dimensional del borde.

Resolvemos $A_s(l)$ en el límite $ml \ll 1$, donde m es la escala que caracteriza la perturbación principal relevante en el punto fijo UV. En la geometría del bulk, esto

¹¹Por conveniencia, hemos hecho el cambio de coordenadas $\frac{d\tilde{z}}{\sqrt{f(\tilde{z})}} = dz$, siendo z la coordenada que se usó en la sección anterior.

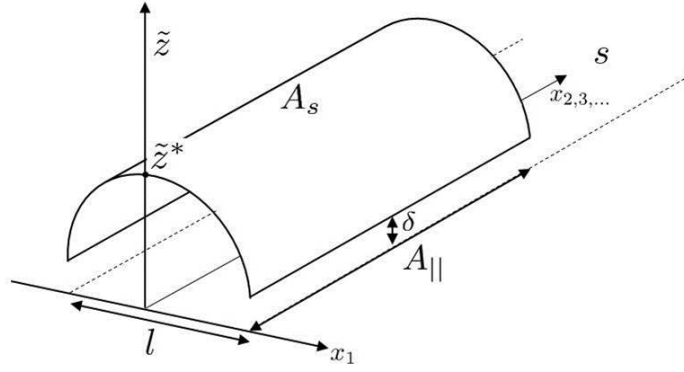


Figura 4.1: Arreglo geométrico holográfico para calcular la entropía de una franja: La franja s es la región entre los planos (líneas discontinuas). Los planos se extienden en las coordenadas $\{x_2, x_3, \dots\}$ y están separados en la dirección x_1 una distancia l (ancho de la franja). \tilde{z} es la coordenada radial del bulk, y \tilde{z}^* es el máximo que penetra la superficie A_s en el bulk. δ es un cutoff UV y $A_{||}$ la unidad de área en los planos.

correponde al límite donde A_s solo siente la métrica aproximadamente AdS dada por

$$f(z) = 1 + (m\tilde{z})^{2\nu} + \dots, \quad (4.6.6)$$

con $\Delta = d - \nu < d$, la dimensión conforme del operador que hace la deformación en el punto fijo UV. Específicamnete, resolvemos (4.6.3–4.6.4) a orden $(m\tilde{z}^*)^{2\nu} \sim (ml)^{2\nu} \ll 1$. De (4.6.4) y (4.6.6) tenemos

$$\tilde{z}^* = \frac{l}{2a} \left(1 + \frac{b}{4^\nu a^{2\nu+1}} (ml)^{2\nu} + \dots \right), \quad (4.6.7)$$

con

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 dv \frac{v^{d-1}}{\sqrt{1-v^{2(d-1)}}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d}{2(d-1)})}{\Gamma(\frac{1}{2(d-1)})}, \\ b &= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \frac{v^{d-1+2\nu}}{\sqrt{1-v^{2(d-1)}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+2\nu)} \frac{\Gamma(\frac{d+2\nu}{2(d-1)})}{\Gamma(\frac{1+2\nu}{2(d-1)})}. \end{aligned}$$

Al mismo orden, tenemos de (4.6.3) que

$$\begin{aligned} A_s / (2L^{d-1} A_{||}) &= \\ &= -\frac{a}{d-2} \frac{1}{\tilde{z}^{*(d-2)}} - \frac{1+2\nu}{2-d+2\nu} b \frac{(m\tilde{z}^*)^{2\nu}}{\tilde{z}^{*(d-2)}} + \frac{1}{d-2} \frac{1}{\delta^{d-2}} - \frac{1}{2} \frac{(m\delta)^{2\nu}}{(d-2-2\nu)\delta^{d-2}} + \dots \\ &= -\frac{2^{d-2}}{d-2} \frac{a^{d-1}}{l^{d-2}} + \frac{d-1}{d-2-2\nu} (2a)^{d-2-2\nu} b \frac{(ml)^{2\nu}}{l^{d-2}} \\ &\quad + \frac{1}{d-2} \frac{1}{\delta^{d-2}} - \frac{1}{2} \frac{(m\delta)^{2\nu}}{(d-2-2\nu)\delta^{d-2}} + \dots, \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

donde hemos usado (4.6.7) en el último paso. Al hacer la combinación de la información mutua I_s los últimos dos términos en (4.6.9) cancelan exactamente la divergencia UV en A_{plano} , que es $4G_N^{(d+1)}$ veces la EE de la mitad del espacio. Tenemos entonces

$$4G_N^{(d+1)} I_s = \frac{2^{d-2}}{d-2} \frac{a^{d-1}}{l^{d-2}} - \frac{d-1}{d-2-2\nu} (2a)^{d-2-2\nu} b \frac{(ml)^{2\nu}}{l^{d-2}} + \dots \quad (4.6.9)$$

Vemos que la EE de la franja tiene una expansión en potencias determinadas por las potencias que aparecen en la expansión de la métrica. Para potencias genéricas esta no contiene un término constante en el límite $l \rightarrow 0$, por lo que cualquier término constante en la información mutua viene enteramente de la entropía de la mitad del espacio.

4.6.2. Análisis holográfico de la positividad de reflexión

La fórmula holográfica (4.5.38) nos da la traza del tensor de energía-momento en términos del cociente $\delta A'/\delta A$ cerca de $z = 0$. Este cociente se fija pidiendo regularidad en el interior de bulk. Desde el punto de vista del borde, la función de dos puntos de $\Theta(x)$ debe ser consistente con la unitariedad, y queremos ver cómo esto ocurre en el lado gravitatorio. Probaremos primero que la unitariedad en QFT requiere que, en el límite de N grande, la estabilidad de la acción clásica de gravedad en el bulk ante perturbaciones. Después verificaremos que la condición de energía nula (NEC) junto con la regularidad de la solución en el IR, nos da la unitariedad del correlador de $\Theta(x)$.

Como vimos en (3.2.2), la positividad de reflexión (PR) exige que

$$\int d^d x d^d y \alpha^*(\bar{x}) \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle \alpha(y) \geq 0, \quad (4.6.10)$$

donde $\mathcal{O}(x)$ es un operador local en la QFT, $\alpha(x)$ es una función de prueba suave con soporte en la mitad superior del espacio Euclídeo $x^0 > 0$, y $\bar{x} = (-x^0, x^1, \dots, x^{d-1})$. Con esto $\alpha^*(\bar{x})$, tiene soporte en tiempo Euclídeo negativo. Cuando la QFT tiene un dual holográfico, la acción Euclídea en capa de masa en presencia de una fuente ϕ^0 en el borde de AdS es

$$S(\phi^0) = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \phi^0(x) \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle \phi^0(y) + \dots \quad (4.6.11)$$

donde hemos omitido términos divergentes que hacen a esta acción positiva. Nótese que (4.6.11) implica el correlador en puntos coincidentes, mientras que (4.6.10) no.

Queremos encontrar condiciones que aseguren la propiedad PR en modelos ho-

lográficos. Para ver esto, elijamos ϕ_1^0 y ϕ_2^0 con soporte en $x^0 > 0$, hagamos

$$\phi_{1\bar{1}}^0(x) = \phi_1^0(x) + \phi_1^0(\bar{x}) \quad (4.6.12)$$

$$\phi_{2\bar{2}}^0(x) = \phi_2^0(x) + \phi_2^0(\bar{x}) \quad (4.6.13)$$

$$\phi_{1\bar{2}}^0(x) = \phi_1^0(x) + \phi_2^0(\bar{x}) \quad (4.6.14)$$

$$\phi_{2\bar{1}}^0(x) = \phi_2^0(x) + \phi_1^0(\bar{x}) . \quad (4.6.15)$$

Se tiene, por PR, que

$$\begin{aligned} & S(\phi_{1\bar{2}}^0) + S(\phi_{2\bar{1}}^0) - S(\phi_{1\bar{1}}^0) - S(\phi_{2\bar{2}}^0) \\ &= \int d^d x d^d y (\phi_1^0(\bar{x}) - \phi_2^0(\bar{x})) \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle (\phi_1^0(y) - \phi_2^0(y)) \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

La PR exige esta desigualdad particular para la acción como función de las condiciones de borde.

Para probar esta considérese la acción $S(\phi_{1\bar{2}}^0)$. Esta es la acción en el bulk para un campo $\phi_{1\bar{2}}(x, z)$ en el bulk con condiciones de borde $\lim_{z \rightarrow 0} \phi_{1\bar{2}}(x, z) = \phi_{1\bar{2}}^0(x)$. La acción en el bulk es local, y podemos escribir esta como una suma de dos términos, $S_{1\bar{2}}^+$ y $S_{1\bar{2}}^-$, correspondientes a las acciones para $x^0 > 0$ y $x^0 < 0$,

$$S(\phi_{1\bar{2}}^0) = S(\phi_{1\bar{2}}) = S_{1\bar{2}}^+ + S_{1\bar{2}}^- . \quad (4.6.17)$$

De forma análoga tenemos

$$S(\phi_{2\bar{1}}^0) = S(\phi_{2\bar{1}}) = S_{2\bar{1}}^+ + S_{2\bar{1}}^- . \quad (4.6.18)$$

Por simetría ante reflexión en tiempo Euclídeo, las solución reflejada $\phi_{1\bar{2}}$ y $\phi_{2\bar{1}}$ coinciden en $x^0 = 0$, o sea, $\phi_{1\bar{2}}(x^0 = 0, \vec{x}, z) = \phi_{2\bar{1}}(x^0 = 0, \vec{x}, z)$. Podemos tomar un campo continuo en el bulk de la forma $\psi_{1\bar{1}} = \theta(x^0)\phi_{1\bar{2}} + \theta(-x^0)\phi_{2\bar{1}}$ y con condiciones de borde $\phi_{1\bar{1}}^0$. Este no será una solución a las ecuaciones de movimiento con esas condiciones de borde. Esperamos que la acción se minimice sobre las soluciones a la ecuación de movimiento $\phi_{1\bar{1}}$ con las misma condiciones de borde. Tenemos entonces

$$S(\psi_{1\bar{1}}) = S_{1\bar{2}}^+ + S_{2\bar{1}}^- \geq S(\phi_{1\bar{1}}^0) . \quad (4.6.19)$$

Análogamente se define $\psi_{2\bar{2}} = \theta(x^0)\phi_{2\bar{1}} + \theta(-x^0)\phi_{1\bar{2}}$. Tenemos

$$S(\psi_{2\bar{2}}) = S_{2\bar{1}}^+ + S_{1\bar{2}}^- \geq S(\phi_{2\bar{2}}^0) . \quad (4.6.20)$$

Combinando (4.6.17)–(4.6.20) obtenemos PR, ecuación (4.6.16). Este argumento puede fallar para lagrangianos de orden superior, reflejando potenciales violaciones a la

unitariedad en esas teorías.

Es interesante que la PR se garantice por la estabilidad de la solución en el bulk, o, en otras palabras, el hecho de que la solución en el bulk para unas condiciones de borde dadas sea un mínimo absoluto de la acción. Uno espera tener esta estabilidad en modelos físicamente motivados, aunque probarlo en general o en un caso específico puede ser difícil.

Esta prueba de la PR es similar a la prueba de la SSA que vimos en §2.3 [113], aunque difiere en varios detalles, por ejemplo, en el rol de la simetría en tiempo Euclídeo.

Para el caso de operadores de lazos de Wilson, cuyo dual holográfico viene dado por superficies mínimas en el bulk, o operadores con dimensión muy grande, en donde el correlador viene dado por la longitud de una geodésica en el bulk, la propiedad de PR se sigue de una forma similar de la desigualdad triangular del área de las superficies [172].

Retornemos a la discusión de la unitariedad de $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$. En el espacio de momentos, la PR es equivalente a la positividad de la densidad espectral $\rho(m^2)$ del correlador [119]

$$\langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle = \int_0^\infty dm \rho(m^2) \frac{p^4}{p^2 + m^2}. \quad (4.6.21)$$

Para conectarla con (4.5.38), de esta expresión debemos sustraer una expansión polinomial alrededor de $p^2 = \infty$ para eliminar términos de contacto UV. La densidad espectral puede extraerse de esta expresión como la parte imaginaria

$$\rho(m^2) = \frac{1}{\pi m^3} \text{Im} \langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle|_{p^2 = -m^2 - i\epsilon}. \quad (4.6.22)$$

Esta es insensitiva a términos analíticos, en particular a términos de contacto. De acuerdo con (4.5.17) debemos considerar la ecuación para $-p^2$ negativos.

$$\frac{d}{dz} \left(a^{d-1}(z) \varepsilon(z) \frac{d\delta\tilde{A}}{dz} \right) + a^{d-1}(z) \varepsilon(z) p^2 \delta\tilde{A}(z) = 0, \quad (4.6.23)$$

y calcular [ver (4.5.38)]

$$\rho(p^2) = \frac{d-1}{\pi p^3 \kappa^2} a^{d-1}(z) \varepsilon(z) \text{Im} \left. \frac{\partial_z \delta\tilde{A}}{\delta\tilde{A}} \right|_{z \rightarrow 0}. \quad (4.6.24)$$

Asumamos que se cumple la NEC, de forma que $a^{d-1}(z) \varepsilon(z) > 0$, excepto, posiblemente, en $z = 0$. Esto implica que la evolución radial para $\delta\tilde{A}(z)$ es regular.

Como $\delta\tilde{A}(x)$ es real, sus componentes de Fourier obedecen $\delta\tilde{A}_p^* = \delta\tilde{A}_{-p}$. La densidad

espectral puede ser reescrita entonces como

$$\rho(p^2) = \frac{d-1}{\pi p^3 \kappa^2} \frac{1}{|\delta \tilde{A}_p|} \left\{ \frac{1}{2i} a^{d-1}(z) \varepsilon(z) \left(\delta \tilde{A}_p^* \partial_z \delta \tilde{A}_p - \delta \tilde{A}_p \partial_z \delta \tilde{A}_p^* \right) \right\} \Big|_{z \rightarrow 0}. \quad (4.6.25)$$

Normalicemos la solución de forma que $|\delta \tilde{A}_p| \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$. La densidad espectral es entonces el flujo de probabilidad para $\delta \tilde{A}$ (interpretando la coordenada radial del bulk como una evolución temporal). Este flujo es conservado por la ecuación de movimiento,

$$\partial_z \left[a^{d-1}(z) \varepsilon(z) \left(\delta \tilde{A}_p^* \partial_z \delta \tilde{A}_p - \delta \tilde{A}_p \partial_z \delta \tilde{A}_p^* \right) \right] = 0. \quad (4.6.26)$$

Como resultado, la densidad espectral puede ser evaluada en cualquier z .

Calculando el flujo para z suficientemente grande, donde la expansión para $\delta \tilde{A}_{IR}$ en (4.5.26) vale,¹² obtenemos

$$\text{Im}(\delta \tilde{A}_p^* \partial_z \delta \tilde{A}_p) = \frac{2}{\pi} |D_1(p)|^2 p^{2\alpha_{IR}} z^{2\alpha_{IR}-1}. \quad (4.6.27)$$

Aquí $D_1(p)$ es el factor constante en la solución IR (4.5.26) que es determinado por el pegado de las soluciones en términos del valor de la fuente $h_0(p)$ del borde. Sumando las dependencias del factor de forma y $\varepsilon(z)$ en el límite IR, arribamos a nuestro resultado final para la densidad espectral

$$\rho(p^2) = \frac{2}{\pi^2} ((\Delta_{IR} - d) L_{IR}^{(d-1)/2} \phi_{IR}^0)^2 |D_1(p)|^2 p^{2\Delta_{IR}-d-3}. \quad (4.6.28)$$

Aquí ϕ_{IR}^0 es el factor en (4.5.19) y $(\Delta_{IR} - d) L_{IR}^{(d-1)/2} \phi_{IR}^0$ es la función β del operador principal que domina el flujo hacia el punto fijo IR.

La densidad espectral (4.6.28) es definida positiva, y esto establece la PR del correlador de la traza del tensor de energía-momentos en el modelo holográfico, como consecuencia de la NEC y la regularidad en el IR de la solución.

4.6.3. Estructura de los términos p^d

Usando (4.5.39) podemos investigar los otros términos en la expansión de momentos pequeños del correlador de Θ . Las primeras potencias no enteras en p vienen del término $\frac{A_1}{A_2} \propto p^{2\Delta_{IR}-d}$ en (4.5.39). Como $\Delta_{IR} > d$ la expansión es solo en términos de potencias enteras de p^2 y hasta p^d . En particular, en dimensión d par tenemos la cantidad adimensional

$$\int d^d x x^d \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = (-1)^{d/2} (\nabla_p^2)^{d/2} \langle \Theta(p) \Theta(-p) \rangle|_{p=0}. \quad (4.6.29)$$

¹²La continuación analítica de la solución Euclídea es $\delta \tilde{A}_p(z) \propto i(pz)^\alpha H_\alpha^{(1)}(pz)$.

Esta cantidad ha sido analizada en el pasado y en conexión con la irreversibilidad del GR [125–128].

El término proporcional a p^d viene determinado de expandir

$$\langle \Theta(p)\Theta(-p) \rangle \approx \frac{d-1}{\kappa^2} \frac{1}{f'_0} \frac{p^2 g'_1 + p^4 g'_2 + \dots}{1 + p^2 g_1 + p^4 g_2 + \dots} \Big|_{z=z_{UV}}. \quad (4.6.30)$$

Por ejemplo, en $d = 4$, el coeficiente de p^4 es

$$\frac{3}{\kappa^2} \frac{1}{f'_0} (g'_2 - g_1 g'_1) = \frac{3}{\kappa^2} \int_{z_{UV}}^{z_{IR}} dy_1 \frac{1}{a^3(y_1) \varepsilon(y_1)} \left(\int_{z_{IR}}^{y_1} dy_2 a^3(y_2) \varepsilon(y_2) \right)^2. \quad (4.6.31)$$

Este es positivo en el UV y en el IR, y finito para flujos genéricos. Sin embargo, esta cantidad adimensional no es un término de borde, por lo que depende de los detalles del flujo del GR, y no se reduce a una diferencia de anomalías entre los puntos fijos, en general. En [125–128] se propuso que este término debería ser proporcional al cambio en la anomalía A entre los puntos fijos para flujos encendidos por un operador marginal. Una propuesta similar se hizo en [153] para el límite de “slow roll” de la solución en la pared de dominio. No hemos encontrado ninguna evidencia que respalde estas propuestas a partir de (4.6.31).

Hasta aquí hemos estudiado la renormalización en el término de área en la EE a través de la fórmula (4.0.8). Esta expresión coincide en $d = 2$ con la fórmula de Zamolodchikov que nos da la diferencia de las cargas centrales de los puntos fijos. La fórmula (4.0.8) puede ser vista como una generalización de la expresión de Zamolodchikov a dimensión d , en donde, en lugar de tener una implicación sobre renormalización de las cargas centrales, se tiene una implicación sobre la renormalización de la parte universal dentro del término de área de la entropía de entrelazado.

En las siguientes secciones estudiaremos cómo renormaliza el término de área desde un enfoque distinto, con ayuda de la entropía relativa.

4.7. Entropía relativa y teoremas del área

La entropía relativa es una cantidad ideal para estudiar la relación entre dos estados. Una forma natural de aplicar este recurso al estudio de flujos del GR, es considerar cómo cambia la entropía relativa entre los vacíos de una CFT perturbada y una CFT sin perturbar, a medida que cambiamos la escala de la región a la que tomamos sus reducciones. Consideraciones similares fueron hechas antes en la literatura [173, 174], en donde se estudió la entropía relativa clásica entre las distribuciones de probabilidad definidas por la integral funcional como una medida de la distinguibilidad de las teorías.

Aquí consideraremos la entropía relativa cuántica en tiempo real, entre dos estados

de vacío reducidos a una esfera, y estudiaremos las consecuencias de la positividad y la monotonidad de esta. Evidentemente no cualquier par de estados se pueden comparar con la entropía relativa. Teorías diferentes, con contenidos operatoriales diferentes, usualmente viven en espacios de Hilbert diferentes, y no tiene sentido comparar sus estados con la entropía relativa. Para poder hacerlo, necesitamos que los constituyentes microscópicos de los dos modelos sean iguales. Por este motivo, estudiaremos teorías con el mismo punto fijo UV. Tomaremos como el estado de referencia el vacío de una CFT, y estudiamos su entropía relativa con el vacío de la CFT perturbada con un operador relevante.

Un problema que surge de inmediato es que la entropía relativa es muy eficiente en distinguir estados. En nuestro estudio, esto tendrá como consecuencia la presencia de divergencias. Para poder tener implicaciones sobre el GR, necesitamos evitar que la entropía relativa distinga mucho estos dos vacíos.

Las divergencias aparecen por el hecho de que, si consideramos que dos teorías son aproximadamente iguales a distancias cortas, los correladores de la teoría deformada no convergen a los de la CFT en el UV lo suficientemente rápido como para hacer la entropía relativa entre sus vacíos finita. Encontraremos un rango de dimensiones conformes Δ de la perturbación que inicia el flujo del GR donde la entropía relativa es finita.

Tenemos además posibles divergencias IR, que vienen de diferencias entre los estados que crecen al compararlos en un álgebra de una región cada vez mayor. De hecho, si tomamos la entropía relativa entre los estados sin reducir a ninguna región, esta será infinita IR, pues los estados son puros. Este problema puede evitarse fácilmente al considerar los estados reducidos a una región finita. El tamaño R de la región será el parámetro que indicará la escala del GR. Veremos que en general la entropía crece super-volumétricamente como R^d debido a las contribuciones del Hamiltoniano modular. Siguiendo [31], compararemos estos dos estados en la superficie de Cauchy nula. Esto reduce la entropía relativa a crecer como el área de la región $\sim R^{d-2}$, dándonos información directa sobre la entropía de entrelazado y aspectos del GR de su término de área.

El resultado principal del resto de este capítulo es una nueva prueba del teorema *c* de Zamolodchikov, que se extiende a dimensiones mayores $d > 2$ como una propiedad del flujo del GR del término de área en la EE [32]. Esta propiedad dice que la renormalización del término de área siempre tiene signo negativo, y que es finita en el rango $\Delta < (d + 2)/2$ de dimensión conforme de la perturbación. Esto coincide con el análisis hecho en las secciones anteriores.

La expresión en términos de la entropía relativa ofrece una interpretación más transparente desde el punto de vista de la Teoría de la Información de esta irreversibilidad del GR. El Teorema *c* es equivalente al siguiente enunciado: El vacío ρ_1 de la teoría

que implementa el flujo del GR puede distinguirse (usando la entropía relativa) del vacío ρ_0 del punto fijo UV, comparando estos en la superficie de Cauchy nula Σ_{nula} del completamiento causal de una esfera de radio R , en la cantidad

$$S(\rho^1 || \rho^0)_{\Sigma_{\text{nula}}} \approx \frac{c_{UV} - c_{IR}}{3} \log(mR) , \quad (4.7.1)$$

para radios R mucho mayores que la escala m que caracteriza al flujo del GR; siendo c_{UV} y c_{IR} las cargas centrales de los puntos fijos UV e IR respectivamente. La diferencia entre las cargas centrales controla la distinguibilidad o distancia estadística entre los vacíos de estas dos teorías. El Teorema *c* (versión débil) equivale a la positividad de la entropía relativa.

4.8. Entropía relativa entre estados de distintas teorías

La entropía relativa entre dos matrices densidad ρ^0 y ρ^1 está definida por

$$S(\rho^1 || \rho^0) = \text{Tr} (\rho^1 \log \rho^1 - \rho^1 \log \rho^0) . \quad (4.8.1)$$

Estamos interesados en la entropía relativa entre los vacíos de dos teorías, reducidos a ciertas superficies. Las superficies que usualmente se consideran son espaciales, pero también consideraremos el caso de superficies nulas. Las dos teorías las denotamos por \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_1 . Tomaremos \mathcal{T}_0 como una CFT y \mathcal{T}_1 como la QFT obtenida a partir de perturbar \mathcal{T}_0 con un operador relevante, iniciando un flujo del GR:

$$S_1 = S_0 + \int d^d x g \mathcal{O}(x) . \quad (4.8.2)$$

Esta construcción asegura que \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_1 tengan el mismo contenido operatorial. Como los estados pertenecen a teorías distintas, estos (o en el cuadro de Heisenberg, los operadores) evolucionan en el tiempo con Hamiltonianos diferentes. Por esto debemos ser más específicos en el instante de tiempo (o superficie de Cauchy) en la que comparamos estos estados pues estos son sometidos a evoluciones unitarias distintas. Por este hecho la entropía relativa dependerá de la superficie de Cauchy elegida.

Como se muestra en [31] en una situación similar para el Teorema-*g*, la dependencia de la entropía relativa puede explotarse para reducir, y eventualmente eliminar, la contribución del Hamiltoniano modular. En este caso, la diferencia de entropías hereda las propiedades de positividad y monotonidad de la entropía relativa, y esto puede ser usado para entender propiedades del GR. Aplicamos esta idea a flujos del tipo (4.8.2). En esta sección estudiamos la dependencia de la entropía relativa con la superficie de Cauchy y analizamos en detalle el límite nulo.

4.8.1. Reducción a una región espacial de estados de teorías distintas

Para aclarar la dependencia de la entropía relativa con el tiempo, revisemos primero una sola QFT y la forma estandar en la que un estado se reduce en el espacio-tiempo. Podemos describir el contenido operatorial de la teoría \mathcal{T}_0 en cualquier superficie global de Cauchy Σ_{gl} (donde gl significa global) por un conjunto de campos que llamamos genericamente $\phi_\lambda(x)$, con $x \in \Sigma_{gl}$, que forman un conjunto completo que genera el álgebra de operadores en el espacio de Hilbert correspondiente. Dicho conjunto puede incluir derivadas en el tiempo de los campos o, para adaptar la discusión a una superficie Σ_{gl} arbitraria, derivadas de los campos en la dirección normal a Σ_{gl} . Para cualquier subconjunto $\Sigma \subseteq \Sigma_{gl}$ definimos el álgebra \mathcal{A}_Σ generada por polinomios de los operadores localizados en Σ . Dado un estado global ρ_{gl}^0 , su restricción a \mathcal{A}_Σ nos da el estado reducido ρ_Σ^0 . Este es el estado en \mathcal{A}_Σ que nos da los mismos valores de expectación que el estado global para operadores en la región. Nótese que hasta el momento podemos tomar un estado arbitrario y la dinámica o el Hamiltoniano de la teoría no ha intervenido en esta construcción.

Consideremos otra superficie espacial Σ' con el mismo desarrollo causal \mathcal{D} que Σ (ver Figura 4.2). En el cuadro de Heisenberg, los estados no dependen del tiempo y los operadores evolucionan según la ecuación de Heisenberg. Operadores localizados en puntos de Σ' pertenecen al desarrollo causal de Σ y pueden ser escritos en término de los operadores de Σ usando las ecuaciones de movimiento. Esta identificación depende del Hamiltoniano de la teoría. Teniendo esto en cuenta vemos que el álgebra generada por los operadores en Σ' coincide con la de Σ . Como el estado global no depende de la elección de la superficie de Cauchy en el cuadro de Heisenberg y el álgebra en las dos superficies es la misma, concluimos que los estados reducidos ρ_Σ^0 y $\rho_{\Sigma'}^0$ son iguales. Esto es: con ellos obtenemos los mismos valores de expectación para los mismos operadores en la misma álgebra, donde la identificación de los operadores entre Σ y Σ' se hace usando las ecuaciones de movimiento. Por ello, la EE es la misma, si se usa la misma regularización. La entropía relativa para dos estados de la misma teoría será independiente de la superficie de Cauchy elegida dentro del diamante causal. La subálgebra de operadores y los estados reducidos pueden ser pensados como función del desarrollo causal \mathcal{D} de Σ (que coincide con el de Σ'), más que como funciones de la superficie de Cauchy.

Modifiquemos el Hamiltoniano sumando un término como en (4.8.2), de tal forma que podamos seguir describiendo la base de operadores en una superficie de Cauchy por los mismos campos, que llamamos ahora $\tilde{\phi}_\lambda(x)$ para esta nueva teoría \mathcal{T}_1 . Necesitamos introducir un regulador para hacer esto¹³.

¹³En general es también necesario introducir un cutoff para definir el álgebra en una superficie de

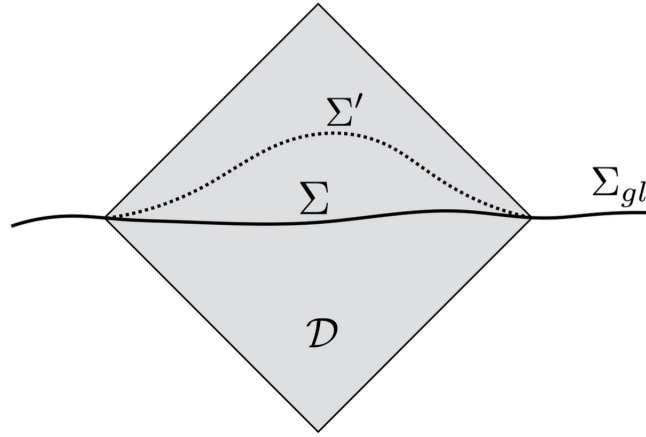


Figura 4.2: Diferentes superficies de Cauchy Σ y Σ' con el mismo completamiento causal \mathcal{D} ; Σ_{gl} es una superficie de Cauchy global.

Consideremos también el cuadro de Heisenberg respecto de este nuevo Hamiltoniano y otro nuevo estado global ρ_{gl}^1 en esta nueva teoría. De vuelta, ρ_Σ^1 y su entropía serán invariantes ante cambiar la superficie de Cauchy de Σ a Σ' (la representación de la matriz densidad puede por supuesto cambiar si cambiamos la base). Eliminamos por ello el subíndice Σ de los estados.

Si queremos comparar con la entropía relativa dos estados de dos teorías con distinto Hamiltoniano necesitamos identificar los espacios de Hilbert, o de forma equivalente, el álgebra de operadores de las teorías de una forma precisa.

Para hacer tal identificación usamos una superficie de Cauchy. Dada una superficie de Cauchy Σ identificamos naturalmente los operadores de campos $\phi_\lambda(x)$ y $\tilde{\phi}_\lambda(x)$ para cada $x \in \Sigma$. Formalmente, la identificación $\phi_\lambda(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}_\lambda(x)$ se lleva a cabo por un unitario U_Σ que mapea los espacio de Hilbert y los operadores entre las teorías de forma que

$$U_\Sigma \tilde{\phi}_\lambda(x) U_\Sigma^\dagger = \phi_\lambda(x) \quad x \in \Sigma. \quad (4.8.3)$$

Los valores de expectación de los operadores $\phi_\lambda(x)$ sobre Σ calculados con los estados ρ^0 y $U_\Sigma \rho^1 U_\Sigma^\dagger$ definen dos estados reducidos diferentes sobre la misma álgebra. El estado $U_\Sigma \rho^1 U_\Sigma^\dagger$ nos da los mismos valores de expectación sobre los campos de la primera teoría como ρ^1 sobre los campos de la segunda teoría,

$$\text{tr}(U_\Sigma \rho^1 U_\Sigma^\dagger \phi_{\lambda_1}(x_1) \dots \phi_{\lambda_m}(x_m)) = \text{tr}(\rho^1 \tilde{\phi}_{\lambda_1}(x_1) \dots \tilde{\phi}_{\lambda_m}(x_m)), \quad x_i \in \Sigma. \quad (4.8.4)$$

Podemos calcular entonces la entropía relativa $S(U_\Sigma \rho^1 U_\Sigma^\dagger || \rho^0)$. De forma análoga, podemos calcular $S(\rho^1 || U_\Sigma^\dagger \rho^0 U_\Sigma)$, con el mismo resultado. Esto se sigue de la invariancia

Cauchy, en lugar de en una región con volumen espacio-temporal. Como es práctica usual en QFT, la existencia de la entropía relativa en el límite del continuo se traslada a la finitud de esta cantidad cuando quitamos el regulador.

de la entropía relativa ante el cambio simultáneo de los dos estados por un mismo unitario.

Para ser más claros, ambos estados, ρ_0 de \mathcal{T}_0 y ρ_1 de \mathcal{T}_1 , definen valores de expectación para operadores en \mathcal{D} en cada teoría. Para calcular la entropía relativa entre ellos, mapeamos las álgebras identificando los elementos de una base local de operadores: $\phi_\lambda(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}_\lambda(x)$ sobre una superficie de Cauchy, o sea, con (4.8.3). Podemos escribir esta entropía relativa como

$$S_\Sigma(\rho^1 || \rho^0) \equiv S(\rho^1 || \rho^0) \Big|_{\phi_\lambda(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}_\lambda(x); x \in \Sigma} . \quad (4.8.5)$$

Esta construcción no difiere de la forma usual en la que la entropía relativa es calculada en sistemas definidos en una red. Por ejemplo, podemos imaginarnos una red en la que grados de libertad de espín están localizados en los vértices. Si tenemos dos estados, por ejemplo, los estados fundamentales de dos Hamiltonianos distintos, podemos calcular la entropía relativa entre ellos si identificamos los operadores de espín de ambas teorías.

Hacemos esto en cada superficie de Cauchy que consideremos. Si elegimos otra superficie de Cauchy Σ' en el mismo dominio causal \mathcal{D} de Σ , la entropía relativa que hemos definido dependerá de la superficie de Cauchy; $S_\Sigma(\rho^1 || \rho^0)$ diferirá de $S_{\Sigma'}(\rho^1 || \rho^0)$.

La razón para este cambio es que la identificación de los elementos de la base $\phi_\lambda(x') \leftrightarrow \tilde{\phi}_\lambda(x')$, $x' \in \Sigma'$, será diferente de la identificación en Σ , o, en el lenguaje anterior, U_Σ es diferente que $U_{\Sigma'}$.

Esto es porque los campos locales $\phi_\lambda(x)$ de Σ pueden ser expresados, por las ecuaciones de movimiento de \mathcal{T}_0 , como cierta funcional no local $\phi_\lambda(x) = F_0^{\Sigma'}[\phi(x')]$ de los campos en $x' \in \Sigma'$, pero para la teoría \mathcal{T}_1 tendremos una funcional diferente $\tilde{\phi}_\lambda(x) = F_1^{\Sigma'}[\tilde{\phi}(x')]$ para expresar los campos, porque las teorías \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_1 tienen distintas ecuaciones de movimiento.

Identificar $\phi_\lambda(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}_\lambda(x)$ en Σ es como identificar $F_0^{\Sigma'}[\phi(x')]$ con $F_1^{\Sigma'}[\tilde{\phi}(x')]$. Como $F_0^{\Sigma'}$ y $F_1^{\Sigma'}$ son funciones diferentes, esto no es compatible con la identificación de los campos locales en Σ' .

Como resultado, identificar operadores locales en diferentes superficies conduce a identificaciones diferentes de los espacios de Hilbert

En una teoría general interactuante es difícil obtener $F^{\Sigma'}$ explícitamente. Afortunadamente no necesitaremos esto. Como ejemplo en donde la evolución entre las superficies puede hacerse de forma explícita, consideremos \mathcal{T}_0 como la teoría de un campo escalar libre de masa m_0 . Tenemos

$$\phi(x) = i \int_{\Sigma'} d^{d-1}x' \sqrt{h} \left(\eta^\mu \partial_\mu^x C_0(x-x') \phi(x') + C_0(x-x') \eta^\mu \partial_\mu \phi(x') \right) , \quad (4.8.6)$$

donde $x \in \mathcal{D}$ y $x' \in \Sigma'$, h es la métrica inducida en Σ' , η^μ es el vector normal a Σ' , y

$$C_0(x - x') = [\phi(x), \phi(x')] , \quad (4.8.7)$$

es el conmutador del campo escalar libre de masa m_0 . La derivada normal $\eta^\mu \partial_\mu \phi(x') \equiv \pi(x')$ es el operador momento adaptado a la superficie Σ' , y debe ser considerado un operador independiente en esta superficie ($\{\phi_\lambda(x')\}_{\lambda=1,2} = \{\phi(x'), \pi(x')\}$). Podemos tomar la teoría \mathcal{T}_1 como un campo escalar libre con una masa distinta m_1 . Esta tiene una función conmutador distinta C_1 en lugar de C_0 en (6.2.39), dando $\tilde{\phi}(x)$ como una combinación diferente de los campos en Σ' .

4.8.2. Hamiltoniano modular

Es conveniente expresar la entropía relativa por la expresión equivalente

$$S(\rho^1 || \rho^0) = \Delta \langle \mathcal{H} \rangle - \Delta S , \quad (4.8.8)$$

donde

$$\Delta S = S(\rho^1) - S(\rho^0) , \quad (4.8.9)$$

es la diferencia de entropías de von Neumann y

$$\Delta \langle \mathcal{H} \rangle = \text{Tr}(\rho^1 \mathcal{H}) - \text{Tr}(\rho^0 \mathcal{H}) , \quad (4.8.10)$$

es la diferencia de los valores de espectación del Hamiltoniano modular

$$\mathcal{H} = -\log \rho^0 . \quad (4.8.11)$$

En nuestro caso, ΔS nos da la diferencia de entropías de entrelazado de dos estados de vacío reducidos a la misma región. Este término no depende de la superficie de Cauchy. La dependencia en Σ viene exclusivamente del valor de expectación del Hamiltoniano modular

$$\Delta \langle \mathcal{H} \rangle_\Sigma = \text{Tr} \left((\rho_\Sigma^1 - \rho^0) \mathcal{H} \right) . \quad (4.8.12)$$

\mathcal{H} es un operador en la teoría \mathcal{T}_0 . Su valor de expectación en el estado ρ^0 es independiente de la superficie de Cauchy, sin embargo, su valor de expectación en el segundo estado ρ_Σ^1 depende de sobre qué superficie hemos hecho la identificación de los operadores de las dos teorías.

Elegimos \mathcal{T}_0 como una CFT, ρ^0 su estado de vacío, y Σ como una esfera $d - 2$ dimensional a tiempo fijo. El Hamiltoniano modular en este caso es la expresión

(2.2.86), dada en términos del operador $T_{\mu\nu}$ de la teoría \mathcal{T}_0 ,

$$\mathcal{H} = \int_{\Sigma} d\sigma \, \eta^\mu \xi^\nu T_{\mu\nu}. \quad (4.8.13)$$

Aquí η^μ es un vector de norma uno orientado al futuro y normal a la superficie de Cauchy Σ , y ξ^ν es el vector de Killing conforme correspondiente a la transformación que deja la esfera invariante. Para una esfera centrada en el origen del plano espacial $x^0 = 0$, las componentes (x^0, x^i) de ξ^ν son

$$\xi^\nu = \frac{\pi}{R} (R^2 - (x^0)^2 - (\vec{x})^2, -2x^0 x^i), \quad (4.8.14)$$

donde R es el radio de la esfera. Se puede comprobar que la corriente $j_\mu = \xi^\nu T_{\mu\nu}$ es conservada usando que $T_{\mu\nu}$ es simétrico, conservado y de traza cero. Esto hace a \mathcal{H} una carga conservada independiente de la superficie de Cauchy en \mathcal{T}_0 , pero este no es el caso cuando evaluamos su valor de expectación en el estado ρ_Σ^1 .

Para evaluar $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma$ necesitamos entender el cambio en el valor de expectación del tensor de energía momento $\Delta\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_\Sigma$. Este es un operador local y su valor de expectación en el nuevo estado ρ_Σ^1 depende de la estructura del estado (las funciones de correlación) cerca del punto x sobre la superficie. Esperamos por lo tanto una expresión local que involucre solo tensores locales. Esto incluye $g_{\mu\nu}$ y todas las cantidades geométricas que pueda construirse con la superficie de Cauchy, como los vectores normales η^μ , la curvatura extrínseca e intrínseca, etc. Dada la invariancia del vacío en su teoría respectiva no tenemos más tensores involucrados.

Sin embargo, los términos de curvatura solo pueden aparecer acompañados por potencias positivas del regulador, por ejemplo de la forma $K_{ij}^2 \epsilon^2$, con K_{ij} la curvatura extrínseca de Σ y ϵ un regulador de distancia corta. Esto es porque estamos evaluando el valor de expectación de un operador local en una QFT en espacio plano, y la forma de Σ solo entra en las funciones de correlación a través de la distancia entre los puntos. Por ejemplo, en una regularización tipo red, $T_{\mu\nu}$ puede ser escrito en términos de operadores en el punto y en unos pocos puntos vecinos, y el valor de expectación en el estado ρ_Σ^1 depende solamente de los correladores a distancia corta en la red.

La curvatura entonces solo entra modificando la distancia entre puntos cercanos y siempre viene acompañada por el regulador. Estos términos pueden ser despreciados si la curvatura es mucho menor que la escala del regulador. Siempre consideraremos que este es el caso.

Tenemos entonces la forma general

$$\Delta\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_\Sigma = k \left(\eta_\mu(x) \eta_\nu(x) - \frac{g_{\mu\nu}}{d} \right) + \mathcal{O}(K^2 \epsilon^2) + \dots \quad (4.8.15)$$

Hemos usado el hecho de que el tensor de energía momentos de una CFT tiene traza cero. Este valor de expectación depende de la superficie de Cauchy a través de los vectores normales η_μ , y esto es crucial para cumplir con el requisito de que $T_{\mu\nu}$ sea de traza cero. Nótese que $\Delta\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_\Sigma$ no transforma como un tensor de Lorentz a no ser que Σ también se transforme. La ecuación (4.8.15) será muy importante en los argumentos que siguen.

Veamos los posibles comportamientos de la constante k con el regulador. Si k es divergente con el regulador, esperamos que un cálculo perturbativo sea suficiente para darnos el término principal en k . El motivo es que el acoplamiento g en (4.8.2), responsable de deformar \mathcal{T}_0 en \mathcal{T}_1 , es relevante y se hace cero en el UV.

Las correcciones perturbativas comienzan a segundo orden en g dado que $\langle T_{\mu\nu}\mathcal{O}\rangle = 0$ para operadores primarios en una CFT. Tomando en cuenta las dimensiones $[k] = d$ y $[g] = d - \Delta$, obtenemos por análisis dimensional que

$$k \sim g^2 \epsilon^{d-2\Delta}. \quad (4.8.16)$$

Concluimos que el valor de espectación del Hamiltoniano modular entre el vacío de una CFT y el vacío de la teoría perturbada es UV divergente para $\Delta \geq d/2$. Para $\Delta < d/2$ no podemos calcular k perturbativamente, pero esperamos un k finito. La dependencia

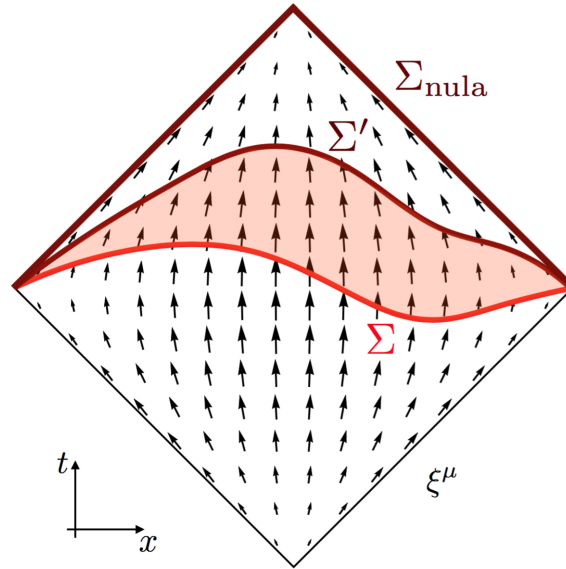


Figura 4.3: Campo vectorial ξ^μ generador del flujo modular geométrico en el completamiento causal de una esfera. $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma$ viene dado por el flujo de ξ^μ a través de la superficie de Cauchy Σ . $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_{\Sigma_{\text{nula}}} = 0$ sobre la superficie de Cauchy nula Σ_{nula} para el rango de perturbaciones discutido en el texto. La divergencia del campo vectorial ξ^μ integrada en el volumen espacio-temporal sombreado nos da $\Delta\mathcal{H}_{\Sigma'} - \Delta\mathcal{H}_\Sigma$, y con esto, la variación de la entropía relativa al cambiar la superficie de Cauchy de Σ a Σ' .

de $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma$ con la superficie Σ se obtiene de sustituir (4.8.15) en (4.8.13)

$$\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma = \frac{k(d-1)}{d} \int_\Sigma d\sigma \eta^\mu \xi_\mu. \quad (4.8.17)$$

Obtenemos una dependencia geométrica simple, dada por el flujo del campo ξ_ν a través de Σ (ver Figura 4.3). El campo (4.8.17) no es una corriente conservada, y por el Teorema de Gauss, tenemos que el cambio en el flujo es

$$\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_{\Sigma'} - \Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma = \frac{k(d-1)}{d} \left(\int_{\Sigma'} d\sigma \eta^\mu \xi_\mu - \int_\Sigma d\sigma \eta^\mu \xi_\mu \right) = \frac{k(d-1)}{d} \int_{V_{\Sigma\Sigma'}} dv (\partial \cdot \xi), \quad (4.8.18)$$

donde

$$(\partial \cdot \xi) = -\frac{2\pi d}{R} x^0, \quad (4.8.19)$$

y $V_{\Sigma\Sigma'}$ es la región espacio-temporal entre las superficies.

El comportamiento en el IR de este valor de espectación se sigue de esta integral. Para la superficie de Cauchy plana a tiempo $x^0 = 0$ obtenemos

$$\Delta\langle\mathcal{H}\rangle = \frac{2\pi\tilde{\Omega}k}{d(d+1)} R^d, \quad (4.8.20)$$

donde R es el radio de la superficie esférica de entrelazado y

$$\tilde{\Omega} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \quad (4.8.21)$$

es el área de la esfera unidad sumergida en \mathbb{R}^{d-1} (S^{d-2} esfera). El mismo comportamiento super-extensivo $\sim R^d$ se obtiene para otras superficies de Cauchy que no se aproximen mucho a la superficie nula, o el futuro nulo del completamiento causal de la esfera.

4.8.3. El límite nulo

Habiendose entendido la dependencia general con la superficie de Cauchy, estamos listos para tomar el límite nulo. De la expresión (4.8.14) para ξ^ν y la definición de η^μ , tenemos que en el límite en que la superficie de Cauchy dentro del completamiento causal de una esfera es nula

$$(\eta^\mu \xi_\mu)|_{\Sigma_{\text{nula}}} = 0. \quad (4.8.22)$$

De hecho ambos vectores son nulos sobre la superficie de Cauchy nula. Con esto y (4.8.17) obtenemos el importante resultado

$$\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_{\Sigma_{\text{nula}}} = 0. \quad (4.8.23)$$

El resultado de este límite, sin embargo, no está completamente justificado si el coeficiente en (4.8.17) es divergente. Como mencionamos arriba, necesitamos que la escala típica de la curvatura de Σ sea mayor que el regulador ϵ . A medida que nos acercamos a la superficie nula, la curvatura intrínseca y extrínseca de la superficie diverge. Por ejemplo, el hiperboloide $(x^0)^2 - (\vec{x})^2 = a^2$ tiene una curvatura extrínseca del orden de a^{-1} , y en el límite nulo $a \rightarrow 0$. Dicho de una forma diferente, necesitamos que el regulador ϵ siempre sea mucho menor que las distancias a lo largo de la superficie Σ , para poder asociar con el regulador alguna distancia física tipo red sobre la superficie. Debemos entonces tener que $\epsilon \lesssim a$ al tomar el límite nulo $a \rightarrow 0$. Podemos tomar cociente a/ϵ como un número arbitrariamente grande y fijo al tomar el límite $\epsilon \sim a \rightarrow 0$. Esto automáticamente controla los términos de curvatura en (4.8.15). Dado esto, necesitamos entender entonces cómo $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma$ se anula.

Examinemos la expresión (4.8.17) en el límite nulo. Por simplicidad consideramos como superficies de Cauchy la familia de hiperboloides Σ_a parametrizadas por su radio a ,

$$\left(x^0 - \sqrt{a^2 + R^2}\right)^2 - \vec{x}^2 = a^2, \quad 0 < |\vec{x}| < R, \quad x^0 > 0. \quad (4.8.24)$$

La integral

$$\int_{\Sigma_a} d\sigma \eta^\mu \xi_\mu = \begin{cases} 4\pi a^2 \log(R/a) + \mathcal{O}(a^3) & d = 2 \\ \frac{2\pi\bar{\Omega}}{(d-1)(d-2)} a^2 R^{d-2} + \mathcal{O}(a^3) & d > 2 \end{cases}, \quad (4.8.25)$$

va genéricamente como $\sim a^2 R^{d-2}$ para a pequeño. Sustituyendo esto en (4.8.17) y usando (4.8.16) para k , tenemos

$$\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_\Sigma \sim g^2 R^{d-2} \epsilon^{d-2\Delta} a^2. \quad (4.8.26)$$

Vemos que usando hiperboloides de radio a , la contribución al Hamiltoniano modular crece como el área $\sim R^{d-2}$ en lugar de crecer como R^d , como ocurría en el caso de la superficie $x^0 = 0$, (4.8.20). La ecuación (4.8.26) nos da un límite cero para $a \sim \epsilon \rightarrow 0$ siempre que

$$\Delta < \frac{d+2}{2}. \quad (4.8.27)$$

O sea, el límite nulo agranda la ventana de Δ en la que el Hamiltoniano modular da una contribución finita, desde $\Delta < d/2$ hasta $\Delta < (d+2)/2$. En esta nueva ventana su contribución es cero en el límite nulo. No tenemos control sobre el límite nulo si $\Delta \geq (d+2)/2$.

4.8.4. Entropía de entrelazado y regímenes de la entropía relativa

Analicemos brevemente la contribución de la EE a la entropía relativa. Como mencionamos anteriormente, esta no depende de la superficie de Cauchy. La contribución de la EE, en contraste con la del Hamiltoniano modular, será una función complicada de R que depende de todo el flujo del GR de la teoría. Podemos preguntar cuándo la diferencia de EE dará una contribución finita o divergente. De nuevo esperamos que en el caso divergente podamos hacer un análisis perturbativo. Los términos divergente son proporcionales al área de la superficie. Por análisis dimensional

$$\Delta S \sim g^2 R^{d-2} \epsilon^{d+2-2\Delta}. \quad (4.8.28)$$

La ventana permitida para tener una ΔS finita es $\Delta < (d+2)/2$. Esto se conocía a partir de cálculos holográficos [141, 142, 149] y por cálculo directo sobre cómo renormaliza el término de área ante el GR [33, 137, 147, 154, 175–177], como se discutió en las secciones anteriores. Esta ventana coincide con la de (4.8.27) para tener un $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle$ nulo en el límite nulo.

Con esta información y la del Hamiltoniano modular, podemos resumir los regímenes de la entropía relativa entre los vacíos de dos teorías de la siguiente forma. Primero, para superficies espaciales (planas o con curvatura $\sim R^{-1}$) la entropía relativa está dominada, a distancias grandes, por la contribución del Hamiltoniano modular. En el IR crece super-extensivamente como R^d . En el UV es finita solo en la ventana de perturbaciones con dimensiones $\Delta < d/2$. En este rango de Δ y a distancia corta, la entropía de entrelazado es finita $\Delta S \sim g^2 R^{2(d-\Delta)}$, y va a cero más rápido que R^d para R pequeño. La contribución del Hamiltoniano modular domina entonces a todas las escalas para $\Delta < d/2$. Como la entropía de entrelazado es independiente de Σ , la entropía relativa cambia de una forma simple y geométrica con la superficie de Cauchy

$$S(\rho^1||\rho^0)_{\Sigma'} - S(\rho^1||\rho^0)_{\Sigma} = -\frac{2\pi k(d-1)}{R} \int_{V_{\Sigma\Sigma'}} dv \, x^0. \quad (4.8.29)$$

Por otro lado, el límite de la entropía relativa en la superficie nula es finito para dimensiones $\Delta < (d+2)/2$, extendiendo el rango de $\Delta < d/2$ de las superficies espaciales. En esta ventana el Hamiltoniano modular se anula y la entropía relativa resulta completamente de la diferencia de la entropía de entrelazado,

$$S(\rho^1||\rho^0)_{\Sigma_{\text{nula}}} = -\Delta S, \quad (4.8.30)$$

y crece como el área $\sim R^{d-2}$ en el IR.

El resultado (4.8.30), equivalente a $\Delta\langle\mathcal{H}\rangle_{\Sigma_{\text{nula}}} = 0$, le da a la superficie nula un rol

especial. La entropía relativa en la superficie de Cauchy nula no distingue los vacíos ρ_1 , ρ_0 tanto como lo haría en otra superficie espacial en el mismo dominio causal. La razón para esto es que, al tomar el límite nulo, el conjunto de correladores en la dirección que se hace nula son como correladores UV, y contribuyen menos a distinguir los estados.

4.9. Consecuencias para la entropía de entrelazado

El resultado (4.8.30) en la ventana

$$\frac{d-2}{2} \leq \Delta < \frac{d+2}{2}, \quad (4.9.1)$$

revela que $-\Delta S$ tiene las propiedades de positividad y monotonidad de la entropía relativa,

$$-\Delta S \geq 0, \quad \frac{d\Delta S}{dR} \leq 0. \quad (4.9.2)$$

En la sección siguiente exploramos las consecuencias de esto en dos y más dimensiones. Para $d = 2$ esto nos lleva a una demostración alternativa y simple del Teorema *c*, mientras que en $d > 2$ nos lleva a demostrar la monotonidad del término de área en la entropía de entrelazado.

4.9.1. Una prueba simple del Teorema-*c*

Consideremos las implicaciones de (4.8.30) para el GR en $d = 2$ dimensiones espacio-temporales. En este caso, la ventana (4.9.1) se convierte en $0 < \Delta < 2$, que incluye todas las deformaciones relevantes posibles.

Tomamos \mathcal{T}_0 como una CFT en $d = 2$ con carga central c_{UV} . En este caso, la entropía de entrelazado para un intervalo de longitud R es de la forma

$$S(R) = \frac{c_{UV}}{3} \log(R/\epsilon) + c_0, \quad (4.9.3)$$

donde ϵ es un regulador de distancia corta y c_0 una constante no universal.

En contraste, la entropía de \mathcal{T}_1 tendrá una dependencia con R muy complicada. Sin embargo, para R grande en comparación con todas las escalas m de \mathcal{T}_1 : $m \sim g^{-1/(d-\Delta)}$, \mathcal{T}_1 va a un punto fijo IR de carga central c_{IR} . Teniendo en cuenta que las divergencias UV son controladas por el punto fijo UV de carga central c_{UV} , la entropía de entrelazado para \mathcal{T}_1 a distancias grandes viene dada por

$$S(R) = \frac{c_{IR}}{3} \log(mR) - \frac{c_{UV}}{3} \log(m\epsilon) + \text{const}. \quad (4.9.4)$$

Sustrayendo (4.9.3) a (4.9.4), obtenemos que la diferencia entre las EE de ambas

teorías a distancias grandes está dada por

$$\Delta S \approx \frac{c_{IR} - c_{UV}}{3} \log(mR), \quad (4.9.5)$$

salvo términos subdominantes en R (que eliminamos en lo que sigue). De (4.9.2), $\Delta S < 0$ y concluimos que

$$c_{IR} < c_{UV}. \quad (4.9.6)$$

Esto constituye una nueva demostración de Teorema- c de Zamolodchikov [44] usando la entropía relativa sobre superficies nulas.

4.9.2. Monotonicidad del término de área en la entropía de entrelazado

Habiéndose obtenido este resultado para $d = 2$, consideremos una QFT en $d > 2$. Notemos que para $d > 2$ la restricción (4.9.1) pone una cota superior $\Delta < (d+2)/2$ sobre las dimensiones de la perturbación que inicia el flujo del GR. Cuando

$$(d+2)/2 < \Delta < d, \quad (4.9.7)$$

la perturbación relevante produce una diferencia entre los valores de espectación del Hamiltoniano modular que no se anula en el límite nulo, y no queda claro si $-\Delta S$, que es también divergente en este rango, hereda la positividad y la monotonicidad de la entropía relativa. Sería interesante estudiar en más detalle este régimen $(d+2)/2 < \Delta < d$, buscando cancelaciones entre las divergencias.

La EE de una QFT en una esfera de radio R mucho mayor que todas las escalas en dicha teoría es extensiva sobre la frontera de la esfera y

$$S(R) = \mu R^{d-2} + \dots \quad (4.9.8)$$

donde μ es una constante de dimensión $d - 2$.

Para una CFT como la \mathcal{T}_0 de arriba, un análisis dimensional nos da que

$$\mu_{UV} = \frac{k_0}{\epsilon^{d-2}}, \quad (4.9.9)$$

donde k_0 es una constante adimensional no universal. Por otro lado, para teorías con escalas tenemos contribuciones adicionales a la forma de (4.9.9). Para \mathcal{T}_1 estas contribuciones están determinadas por g , el coeficiente de la perturbación relevante. Si la teoría de perturbaciones conforme se aplica, la primera corrección es de orden g^2 , y por

lo tanto esperamos

$$\mu_{IR} = \frac{k_0}{\epsilon^{d-2}} + g^2 \frac{k_1}{\epsilon^{2(\Delta - \frac{d+2}{2})}} + \dots \quad (4.9.10)$$

Ver también (4.8.28). El segundo término es divergente para $\Delta > (d+2)/2$, lo cual está fuera del rango (4.9.1) en consideración. En cambio, para $\Delta < (d+2)/2$, la contribución del término de área que produce la perturbación será finito,

$$\mu = \frac{k_0}{\epsilon^{d-2}} + k_1 m^{d-2}. \quad (4.9.11)$$

El coeficiente adimensional k_1 en general no puede calcularse perturbativamente.

Comparando \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_1 con la entropía relativa sobre una superficie nula implica que $\Delta S < 0$. Esto nos dice que el coeficiente en el término de área decrece a lo largo del GR $\Delta\mu < 0$, o

$$\mu_{UV} > \mu_{IR}. \quad (4.9.12)$$

Llamamos a este resultado el Teorema del Área. Nótese que el término divergente no universal proporcional a $1/\epsilon^{d-2}$ es el mismo en ambas teorías y se cancela en la diferencia. Por lo tanto, la renormalización finita del término de área en \mathcal{T}_1 debe ser negativa, $k_1 m^{d-2} < 0$. Notemos también que la condición de monotonicidad $\frac{d\Delta S}{dR} \leq 0$ no nos ofrece información nueva en este análisis del comportamiento en el IR.

En este capítulo hemos mostrado que el Teorema *c* de Zamolodchikov en $d = 2$ y el decrecimiento del término de área en la EE en $d > 2$ es consecuencia, o está relacionado con, la fórmula de Adler-Zee para la renormalización de la constante de Newton y las propiedades de la entropía relativa.

En el primer enfoque, cuando la renormalización del término de área es finito, es negativo, y el resultado puede interpretarse como un aumento de la constante de Newton debido a correcciones cuánticas. Esto implica un efecto de anti-apatallamiento de la gravedad. La entropía no puede ser negativa, por lo que necesita una contribución inicial en el UV para compensar este signo negativo en la renormalización de su término de área, y lo mismo debe ocurrir con la constante de Newton (este es un problema viejo (véase por ejemplo [135]) que solo estamos viendo desde una nueva perspectiva). Se calculó además la función de dos puntos de la traza del tensor de energía-momentos en una representación holográfica de un flujo del GR entre puntos fijos. Se obtuvo con esto una comprobación holográfica de la relación entre la fórmula de Adler-Zee y los términos de área en la EE. Se dedujo que la positividad de reflexión implica la estabilidad de la acción gravitatoria y la condición de energía nula en el bulk.

En el otro enfoque, con el uso de la entropía relativa, se mostró que la versión débil del Teorema *c* y la renormalización negativa del término de área en la EE es consecuencia de la positividad de la entropía relativa, y que esta es igual, sobre la

superficie de Cauchy nula, a la diferencia de las EE de los vacíos del punto fijo UV y la teoría perturbada. Se ve con esto que estas propiedades del GR pueden ponerse en términos de propiedades de cantidades de la teoría de la información cuántica. Se ve además el rol crucial de la invariancia de Lorentz en esto, pues fue necesario hacer la comparación de los estados en la superficie nula para poder decir algo del GR. Este límite nulo reduce la distinguibilidad de forma que la diferencia de EE adquiere las propiedades de positividad y monotonidad de la entropía relativa. La interpretación física de por qué ocurre esto es que en el límite nulo, los correladores en la dirección nula son UV y no distinguen los vacíos. Solo importan los correladores en la dirección transversal.

Capítulo 5

La propiedad Markoviana del Vacío

En este Capítulo comienza la exposición de los resultados necesarios para lograr una demostración el Teorema *A*, o irreversibilidad del GR en dimensión $d = 4$, y obtener un cuadro unificado de los teoremas de irreversibilidad en $d = 2, 3$ y 4 como propiedades de la entropía de entrelazado del vacío. Para esto, un ingrediente fundamental, al menos en el caso de $d = 4$, es lo que hemos llamado la propiedad Markoviana del vacío. Los resultados de este Capítulo están basados en [52, 53].

En el contexto de considerar estados Markovianos, usualmente las subálgebras, o los subespacio de probabilidad, a las que se reducen los estados, están naturalmente dadas (por ejemplo, sitios en una red), y se busca a partir de este conocimiento un estado del espacio de Hilbert, o de fases, que sea Markoviano, también llamados cadenas de Markov. Esto significa, como vimos en §2.1.5, que este estado (en el caso cuántico), satura la subaditividad fuerte (SSA) de la entropía de von Neumann, o existe una relación equivalente entre sus Hamiltonianos modulares. Sin embargo, en nuestro caso haremos algo distinto. No buscaremos, fijadas las subálgebras, qué estado es Markoviano, sino que tomaremos el vacío de cualquier teoría de campos (relativista), y buscaremos las regiones (subálgebras) respecto de las cuáles el vacío es Markoviano. Este problema tiene una respuesta simple y geométrica, que hemos llamado la propiedad Markoviana del vacío. El contenido de la propiedad Markoviana del vacío es decir respecto de qué familia de regiones en el espacio-tiempo, el vacío es Markoviano. Estas regiones son los completamientos causales de cualquier porción de una superficie de Cauchy cuyo borde (que puede tener una forma arbitraria) está sobre un plano nulo. En el caso del vacío de una teoría conforme, esta familia de regiones también incluye a las regiones que tienen borde arbitrario sobre el cono nulo.

La demostración de esta propiedad puede hacerse de dos formas. Una es demostrando la igualdad

$$H_A + H_B - H_{A \cap B} - H_{A \cup B} = 0 , \quad (5.0.1)$$

entre los Hamiltonianos modulares, y otra es demostrando una igualdad similar para

la EE (saturación de la SSA), donde A y B son regiones que pertenecen a la familia descrita arriba, como también lo son la intersección y unión $A \cap B$, $A \cup B$. A través del primer método determinaremos la forma general de los Hamiltonianos modulares del vacío reducido a regiones con borde en una superficie arbitraria γ sobre un plano nulo, ver Figura 5.1. Consideramos el plano nulo \mathcal{P} que pasa por el origen del espacio

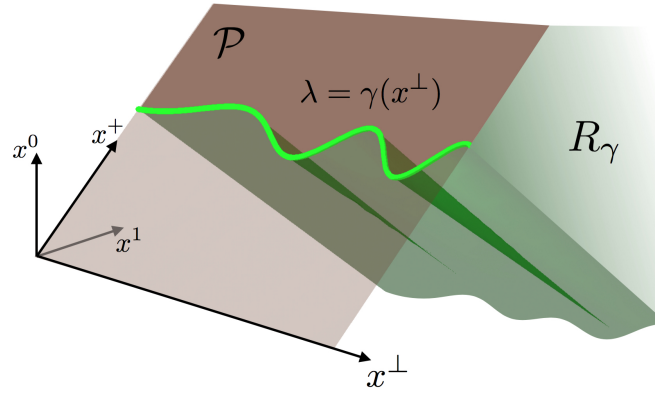


Figura 5.1: Disposición geométrica: plano nulo \mathcal{P} paralelo al vector $\xi = (1, 1, 0, \dots)$, con una curva arbitraria $\gamma(x^\perp)$. La región R_γ es el completamiento causal de una superficie de Cauchy con borde en $\gamma(x^\perp)$.

de Minkowski y paralelo al vector nulo $\xi = (1, 1, 0, \dots)$. Tomamos las coordenadas sobre el plano nulo como (λ, x^\perp) con $x = \lambda\xi + x^\perp$, $x^\perp = (0, 0, x^2, \dots, x^{d-1})$. Consideremos la superficie γ , $d - 2$ dimensional sobre este plano nulo, dada por la ecuación $\lambda = \gamma(x^\perp)$. Tomaremos γ continua y extendida en todas las coordenadas x^\perp hasta infinito, dividiendo el plano nulo en dos regiones.

Estamos interesados en la región causal R_γ del espacio-tiempo cuyo horizonte futuro tiene todos sus puntos en \mathcal{P} y al futuro de γ . La forma que tiene el horizonte futuro de las regiones R_γ es un plano nulo, aunque el pasado (la forma que tiene el horizonte pasado del completamiento causal de una superficie de Cauchy con borde sobre el plano nulo) puede ser muy complicada y contener cáusticas. Para simplificar la notación nos referiremos a estas regiones del espacio-tiempo, así como a su álgebra de operadores asociada, con la misma letra γ . Denotaremos por $\bar{\gamma}$ a la región complementaria: todos los puntos espacialmente separados de γ que tienen su horizonte pasado en \mathcal{P} y al pasado de γ . El álgebra asociada con $\bar{\gamma}$ es el álgebra de operadores que conmutan con todos los operadores que pertenecen al álgebra asociada a γ .

Probaremos que el Hamiltoniano modular del vacío reducido a γ viene dado por

$$H_\gamma = 2\pi \int d^{d-2}x^\perp \int_{\gamma(x^\perp)}^\infty d\lambda (\lambda - \gamma(x^\perp)) T_{\lambda\lambda}(\lambda, x^\perp). \quad (5.0.2)$$

Esto generaliza (2.2.9) al caso de cualquier región cuya superficie borde espacial yace

sobre un plano nulo. Aquí de nuevo encontramos una expresión en términos del tensor de energía-momentos, y es de hecho de la forma de Rindler para cada rayo nulo por separado. Para el caso de la cuña de Rindler, que obtenemos cuando γ es constante, el resultado corresponde al flujo sobre la superficie nula de la corriente conservada (2.2.27), y podemos escribir el Hamiltoniano modular, proporcional al operador generador de boost, en cualquier otra superficie de Cauchy como una integral del tensor de energía-momento. En general este no es el caso para una γ que no es constante. Para γ arbitraria, H_γ no es el flujo de una corriente conservada. Solo es una integral local sobre la superficie de Cauchy nula. Si queremos expresar H_γ en otra superficie de Cauchy que no es la nula, obtendremos una expresión no local.

El resultado (5.0.2) fue probado para campos libres en [80] (ver también [93]), y para pequeñas deformaciones alrededor de γ constante en [37]. Además, en el contexto de la conjeturada condición cuántica de energía nula (QNEC) [178, 179], esta fórmula fue obtenida en [180] para la clase de teorías que saturan la QNEC. Desde este punto de vista, nuestro resultado implica que la QNEC es saturada para pequeñas deformaciones del vacío de una QFT.

Conviene distinguir el Hamiltoniano modular completo de una región V , dado por

$$\hat{H}_V = H_V - H_{\bar{V}}, \quad (5.0.3)$$

de los Hamiltonianos modulares H_V y $H_{\bar{V}}$, que solo actúan en V y \bar{V} respectivamente. El Hamiltoniano modular total \hat{H}_V tiene soporte en todo el espacio y siempre aniquila el vacío, $\hat{H}_V|0\rangle = 0$, en contraste con H_V y $H_{\bar{V}}$. Tenemos que

$$\hat{H}_\gamma = 2\pi \int d^{d-2}x^\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (\lambda - \gamma(x^\perp)) T_{\lambda\lambda}(\lambda, x^\perp), \quad (5.0.4)$$

donde lo único que se cambió respecto de (5.0.2) fue extender la integral en λ hasta $-\infty$.

Demostraremos que los flujos modulares generados por los operadores $U(s) = e^{-is\hat{H}_\gamma}$ mueven cualquier otra región con borde sobre el plano nulo de una manera geométrica precisa.

Probaremos este resultado de dos formas diferentes. Después de presentar algunos resultados conocidos sobre transformaciones conformes y Hamiltonianos modulares en una CFT en la Sección 5.2, daremos una primera prueba en la Sección 5.3. Esta está basada en un cálculo directo que usa el método de réplicas y la expansión del producto de operadores (OPE) para operadores de twist separados a lo largo de la dirección nula. Esta prueba sigue de cerca los métodos del trabajo [93].

Basándonos en ciertos teoremas matemáticos algebraicos bajo el nombre de semi-inclusión modular (half-sided modular inclusions), que revisamos en la Sección 5.4,

daremos una segunda prueba en la Sección 5.5 que comienza calculando el álgebra de los operadores (5.0.4). Esta resulta ser un algebra de Lie infinito dimensional, con conmutadores

$$[\hat{H}_{\gamma_1}, \hat{H}_{\gamma_2}] = 2\pi i(\hat{H}_{\gamma_1} - \hat{H}_{\gamma_2}). \quad (5.0.5)$$

En contraste con las simetrías espacio-temporales usuales, los unitarios asociados a esta álgebra mueven los operadores de campo de forma local sobre la superficie nula, pero de forma no local fuera de esta. Usando este y otros resultados de la teoría algebraica de QFT y la condición promediada de energía nula (ANEC), demostrada en [37, 62], establecemos que los operadores (5.0.4) son de hecho los Hamiltonianos modulares completos de las regiones R_γ .

En la Sección 5.6 ofrecemos una derivación alternativa y general del álgebra de los Hamiltonianos modulares y de la acción de sus flujos modulares desde una perspectiva algebraica que no usa las herramientas usuales de CFT, y en particular, no necesita la expresión explícita de los H_γ en términos del tensor de energía-momento. Sin embargo, producto de la generalidad de este enfoque, no obtendremos la forma explícita de H_γ . La mayor parte de estos resultados son obtenidos a partir de teoremas de QFT algebraica desarrollados en los trabajos [60, 181].

La forma (5.0.2) de H_γ implica la siguiente igualdad para dos regiones γ_1, γ_2 que se intersectan,

$$H_{\gamma_1} + H_{\gamma_2} - H_{\gamma_1 \cap \gamma_2} - H_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = 0. \quad (5.0.6)$$

Esta ecuación se sigue trivialmente mirando la contribución de cada línea nula por separado. De hecho, cualquiera de nuestros tres enfoques conducen a esta igualdad, en particular el último enfoque basado en la teoría de semi-inclusión modular de álgebras en el que no se hace explícita la forma de H_γ . Mostramos que esto es equivalente a la saturación de la desigualdad de la subaditividad fuerte (SSA) para estas regiones

$$S(\gamma_1) + S(\gamma_2) - S(\gamma_1 \cap \gamma_2) - S(\gamma_1 \cup \gamma_2) = 0. \quad (5.0.7)$$

En la Sección 5.7 se presentan argumentos geométricos simples para probar que, sobre el plano nulo, todas las entropías de entrelazado y de Rényi son independientes de la forma de la frontera de la región. Este es un resultado muy fuerte que implica que todas las entropías de Rényi S_n también satisfacen la propiedad de Markov (aún cuando las entropías de Rényi no cumplen la SSA).

$$S_n(\gamma_1) + S_n(\gamma_2) - S_n(\gamma_1 \cap \gamma_2) - S_n(\gamma_1 \cup \gamma_2) = 0. \quad (5.0.8)$$

Este sistema infinito de igualdades de combinaciones de las entropías de Rényi reduce aún más la estructura de entrelazado del vacío a una conocida como de tipo producto.

Las igualdades de Markov en términos de los Hamiltonianos modulares o en términos de las entropías son equivalentes. Sin embargo, de conocer la forma explícita de los Hamiltonianos modulares no se obtiene la forma explícita de las entropías y viceversa. Uno pudiera esperar de forma naive que sí se podría obtener, dado que la entropía es el valor de espectación del Hamiltoniano modular. Sin embargo, la parte no trivial que se conoce del Hamiltoniano modular, y que determina el flujo modular, tiene valor de espectación cero sobre el vacío, y es solo la constante aditiva (que no modifica el flujo modular) la que es igual a la entropía, y que representa a la normalización de la matriz densidad en QFT. Para determinar las expresiones del Hamiltoniano modular y la EE de una misma región, se requieren métodos muy diferentes. En el próximo Capítulo se determinará la forma explícita de las entropías de las regiones γ .

Entre las Secciones 5.3 y 5.3.4, se obtendrá la forma explícita de H_γ mediante el análisis del límite nulo del OPE de los operadores de twist asociados a los bordes de una franja, y entre las Secciones 5.4 y 5.5.4 se reobtendrá el mismo resultado para H_γ como consecuencia de los teoremas algebraicos de semi-inclusión modular. Antes de pasar a esto, nos detendremos primero en analizar la equivalencia entre las condiciones de Markovianidad (5.0.6) y (5.0.7), Sección 5.1, y en el análisis de la relación entre los flujos modulares geométricos de esferas sobre el cono nulo, y parábolas sobre el plano nulo, para el vacío de una CFT, Sección 5.2.

5.1. La propiedad Markoviana en términos de los Hamiltonianos modulares

Para una región X del espacio se tiene que,

$$H_X = -\log \rho_X + c_X, \quad (5.1.1)$$

con c_X una constante indeterminada. El resultado que demostraremos en lo que sigue y anunciado en (5.0.6) no es a priori equivalente con (5.0.7), que repetimos aquí por comodidad

$$S(A) + S(B) - S(A \cap B) - S(A \cup B) = 0 \Leftrightarrow -\log \rho_A - \log \rho_B + \log \rho_{A \cap B} + \log \rho_{A \cup B} = 0. \quad (5.1.2)$$

Necesitamos asegurarnos de que

$$S(A) + S(B) - S(A \cap B) - S(A \cup B) = 0 \Leftrightarrow H_A + H_B - H_{A \cap B} - H_{A \cup B} = 0. \quad (5.1.3)$$

Esto equivale a demostrar que

$$-\log \rho_A - \log \rho_B + \log \rho_{A \cap B} + \log \rho_{A \cup B} = k \implies k = 0, \quad (5.1.4)$$

donde $k = -c_A - c_B + c_{A \cap B} + c_{A \cup B}$ es una constante.

Para ver esto notemos primero que tomando valor de espectación en el miembro izquierdo de (5.1.4) en el estado $\rho_{A \cup B}$ y usando la SSA obtenemos que

$$k \geq 0. \quad (5.1.5)$$

Por otro lado, del miembro izquierdo de (5.1.4) tenemos que

$$\text{tr} \exp(\log \rho_{A \cap B} + \log \rho_{A \cup B} - \log \rho_A) = e^k \text{tr} \rho_B = e^k. \quad (5.1.6)$$

Usamos ahora la desigualdad de Golden-Thompson-Lieb (2.1.45) con $X = -\log \rho_A$, $Y = \log \rho_{A \cap B}$, $Z = \log \rho_{A \cup B}$,

$$\begin{aligned} e^k &\leq \int_0^\infty dt \text{tr} \left((t + \rho_A)^{-1} \rho_{A \cup B} (t + \rho_A)^{-1} \rho_{A \cap B} \right) \\ &= \int_0^\infty dt \text{tr} \left((t + \rho_A)^{-1} \rho_A (t + \rho_A)^{-1} \rho_{A \cap B} \right) = \text{tr} \rho_{A \cap B} = 1. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

En el primer paso usamos que el estado $\rho_{A \cup B}$ está evaluando un operador del álgebra A , y para esto, es suficiente remplazarlo por ρ_A . En el segundo paso integramos en t explícitamente. Esto implica que $k \leq 0$, con lo cual $k = 0$ como queríamos probar. Por lo tanto, (5.1.3) es equivalente a (5.1.2).

5.2. El plano, el cono, y el cilindro

Para una CFT en espacio de Minkowski estamos interesados, con vista a su aplicación posterior a los teoremas del GR, en regiones con borde arbitrario sobre el cono de luz pasado de un punto (cono nulo). Para ello, resulta conveniente estudiar regiones sobre el plano nulo, dado que estas pueden mapearse al cono nulo por una transformación conforme. Trabajaremos en una métrica con signatura $(+ - - \dots -)$. La transformación conforme entre las coordenadas X^μ y x^μ del espacio de Minkowski

$$x^\mu = 2 \frac{X^\mu - (X \cdot X)C^\mu}{1 - 2(X \cdot C) + (X \cdot X)(C \cdot C)} - R^2 C^\mu, \quad C^\mu \equiv (0, 1/R, \vec{0}), \quad (5.2.1)$$

mapea el espacio de Rindler $X^\pm = X^1 \pm X^0 \geq 0$ al diamante que es el desarrollo causal de una esfera centrada en el origen, $x^\pm = r \pm x^0 \leq R$. En particular, el origen $X^\mu = 0$ se mapea al punto $(0, -R, \vec{0})$ de la extrema izquierda de la esfera, los horizontes futuro

y el pasado de Rindler son mapeados en los horizontes pasado y futuro de la esfera. El punto a la derecha de la esfera $i = (0, R, \vec{0})$ corresponde con el infinito espacial en las coordenadas X , ver Figura 5.2. Todos los puntos sobre el rayo de luz marcado en rojo en la figura también corresponden con infinito en las coordenadas X . Parte del plano $X^- = 0$ es mapeado al cono nulo pasado del punto $(R, \vec{0})$. Todas las esferas que pasan por i corresponden a planos dentro del plano nulo $X^- = 0$. Otras esferas en el cono nulo corresponden a parábolas

$$\lambda = \lambda_0 + a(x^\perp - x_0^\perp)^2 \quad (5.2.2)$$

en el plano nulo original y con eje de simetría apuntando en la dirección $(1, 1, \vec{0})$. Estas parábolas pueden tener $|a|$ arbitrariamente grande, haciéndose tan alineadas con una línea nula como querramos. Revisemos en el lenguaje del plano nulo lo que se conoce

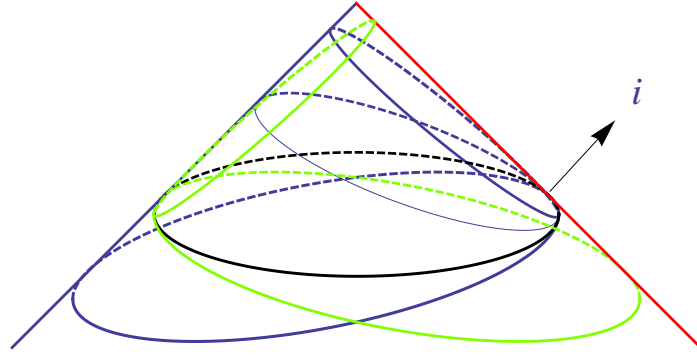


Figura 5.2: Cono nulo en el espacio de Minkowski. Las esferas sobre el cono que pasan por el punto i son mapeadas a planos sobre el plano nulo con la transformación conforme (5.2.1). Todas las otras esferas (en verde) son mapeadas a regiones parabólicas en el plano nulo. El punto i y la línea roja nula son mapeadas a infinito.

sobre el Hamiltoniano modular y el flujo modular en una CFT. El H_γ de $\gamma = \text{cte}$ de Rindler tiene la forma (5.0.2) cuando se escribe sobre el plano nulo. Este es el flujo de una corriente conservada correspondiente al generador de boost. Los Hamiltonianos modulares de esferas se obtienen a partir de estos a través de una transformación conforme [49, 54]. Cuando la esfera es transformada en una parábola sobre el plano nulo, encontraremos la misma expresión (5.0.2), donde ahora γ es una parábola. Esto puede chequearse por cálculo directo (uno de los campos vectoriales de Killing conformes deja fija la parábola sobre el plano), pero podemos llegar al mismo resultado de forma más simple. Obtenemos la parábola sobre el plano nulo comenzando con mapear el semiplano nulo al diamante (transformación (5.2.1)), seguido de un boost y una rotación que deje el cono nulo invariante, y seguido de una transformación (5.2.1) de vuelta al plano nulo. La composición de estas transformaciones es una transformación conforme que mapea el plano $\gamma = 0$ sobre el plano nulo, a una parábola sobre el plano

nulo, y mapea cualquier línea nula semi-infinita a otra línea semi-infinita, por lo que se debe componer de traslaciones y dilataciones sobre las líneas nulas. Sin embargo, una dilatación cambiaría la velocidad del flujo modular cerca del punto inicial de la línea semi-infinita, donde el flujo modular debe ser de la forma de Rindler. Concluimos entonces que la transformación es solo una traslación para cada línea nula individual. Esto nos da el resultado (5.0.2) para parábolas y para el vacío de una CFT. La transformación modular actúa de forma local (envía operadores locales en operadores locales para cualquier valor del parámetro modular), en particular, transforman cada rayo nulo en si mismo, como puede deducirse de (5.0.2). Por lo tanto, el flujo modular de parábolas o planos γ_1 actúa sobre cualquier otra superficie γ_2 como

$$U_{\gamma_1}(-s)\gamma_2 U_{\gamma_1}(s) = e^{2\pi s}(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1. \quad (5.2.3)$$

Aquí hay, sin embargo, un detalle sutil geométrico. En la transformación (5.2.1) los puntos sobre el plano nulo $X^- = 0$ son mapeados a infinito para valores finitos de X^+ de este plano nulo,

$$\lambda = -\frac{(x^\perp)^2}{2R} - \frac{R}{2}. \quad (5.2.4)$$

Por ello, alguna de las parábolas en (5.2.2) que cruzan la superficie (5.2.4) no provienen de esferas en el cono nulo. Otro aspecto no deseable (ilustrado en la Figura 5.3) es que el flujo modular de una esfera actuando sobre un punto p del cono nulo por debajo de la esfera será movido con la particularidad de que llega a infinito para un valor finito del tiempo modular. Por lo tanto, en el espacio de Minkowski donde el cono vive, el flujo modular de la esfera no actúa localmente sobre p después de este valor del parámetro modular (aunque la transformación modular continúa existiendo como un unitario para cualquier valor del parámetro modular).

Estos problemas están relacionados con el hecho de que el grupo conforme Lorentziano $SO(2, d)$ no actúa en el espacio de Minkowski, dado que las transformaciones conformes especiales pueden mapear puntos al infinito. En lugar de esto, la CFT está definida de forma natural sobre el cilindro, obtenido de compactificar el espacio de Minkowski [182, 183]. En la Figura 5.3, el espacio de Minkowski es conforme al diamante mostrado con líneas discontinuas dentro del cilindro. En el cilindro no hay distinción entre esferas y semiespacios. El complemento causal de un diamante esférico es otro diamante esférico. El flujo modular del diamante A mueve regiones dentro de A hacia el punto futuro del diamante para tiempos modulares positivos, mientras que mueve a regiones en el complemento de A hacia el punto pasado del diamante esférico del complemento. Durante este flujo, en algún valor del tiempo modular un punto en el complemento de A cruzará el infinito nulo pasado de Minkowski. Un operador de campo en un punto por debajo de esa línea puede seguir siendo representado por una combi-

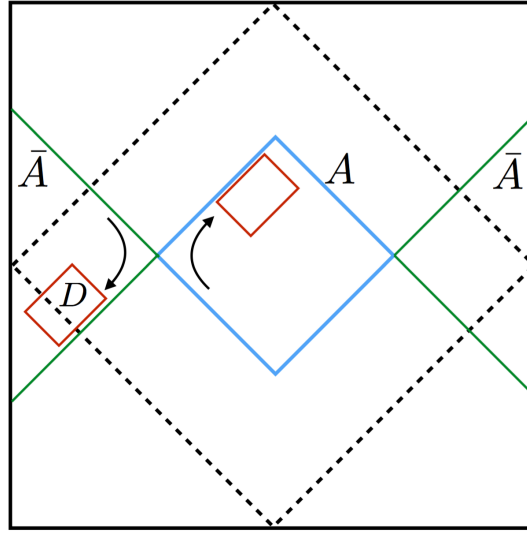


Figura 5.3: El cilindro: donde los dos bordes verticales son identificados. El espacio de Minkowski es conforme al diamante representado con líneas discontinuas. El flujo modular del diamante o cono doble A dentro del espacio de Minkowski mueve a las regiones dentro de A hacia el punto futuro de A (para tiempos modulares positivos) y a regiones D dentro del complemento hacia el punto pasado del complemento en el cilindro. Para algunos valores finitos del tiempo modular un punto en el complemento cruzará el borde pasado nulo del espacio de Minkowski, convirtiendo al flujo en no local desde el punto de vista de Minkowski. Sin embargo, el flujo sigue siendo local en el cilindro.

nación de operadores en el espacio de Minkowski, dado que este espacio contiene una superficie de Cauchy completa del cilindro. Sin embargo, no podrá ser representado en ninguna superficie de Cauchy de Minkowski como un operador local, y el flujo modular dejará de ser local. El mismo flujo modular es siempre local desde el cilindro. Podemos resolver entonces que cualquier problema de singularidad o no localidad de los flujos modulares (que son locales en una región del parámetro modular) en el espacio de Minkowski pueden ser leídos y bien interpretado desde el cilindro.

La transformación conforme del espacio de Minkowski con coordenadas t, \vec{x} al cilindro viene dada por [184]

$$ds_{Mink}^2 = \omega^{-2}(t_c, \psi) (dt_c^2 - d\psi^2 - \sin^2(\psi) d\Omega^2) \quad (5.2.5)$$

con (defínase $r = |\vec{x}|$)

$$t \pm r = \tan\left(\frac{t_c \pm \psi}{2}\right), \quad (5.2.6)$$

y el factor de Weyl

$$\omega = \cos t_c + \cos \psi. \quad (5.2.7)$$

Esta mapea todo un plano nulo de Minkowski a todo el cono pasado nulo de un punto en el cilindro, que coincide con todo el cono futuro nulo de otro punto en el cilindro.

Hay otra ventaja técnica en trabajar con el plano nulo más que con el cono nulo en el espacio de Minkowski: podemos pensar en todas las parábolas de la forma (5.2.2) sin restricciones. Sin embargo, en la versión del plano nulo de las regiones γ que estamos considerando, parecería que hay otra parte desconectada de la superficie de Cauchy sobre el infinito nulo que nos estaría faltando a la hora de escribir el Hamiltoniano modular (5.0.2). Sucede que para una CFT definida sobre el cilindro sabemos que este término no existe, pues la superficie de Cauchy es completa allí. Continuaremos con la descripción en términos del plano nulo por simplicidad.

5.3. Hamiltonianos modulares sobre el plano nulo

I. Expansión OPE

En esta sección presentamos nuestra primera prueba de (5.0.2). Esta está basada en el truco o método de réplicas discutido en el Capítulo 2 y en la expansión del producto de operadores (OPE) para operadores twist en el límite nulo, estudiado en [93]¹. La mayor parte de nuestro análisis es para CFT, y por lo tanto válida en el plano y cono nulo. Hacia el final de la sección extenderemos los resultados del plano nulo (5.0.2) a deformaciones relevantes de la CFT.

5.3.1. Expansión del producto de operadores de twist

Introduzcamos primero los resultados de [93]. En el camino aclararemos un detalle que no se discutió en ese trabajo respecto a los operadores con twist² $\tau < d - 2$.

Escribiendo $x^\pm = x^0 \pm x^1$, estamos interesados en el Hamiltoniano modular del vacío reducido a una franja \mathcal{R} de ancho Δx^+ sobre el plano nulo \mathcal{P} . Más tarde tomaremos el límite $\Delta x^+ \rightarrow \infty$. Este Hamiltoniano puede calcularse usando el método de réplicas de la forma siguiente. La entropía n -ésima de Rényi para una franja espacial viene determinada por el valor de espectación de dos operadores de twist $D_n(\Delta x)$ y $D_n(0)$ (cada uno asociado con cada borde de la franja) en una teoría Euclídea construida a partir de n copias de una CFT Euclídea dada [8]. En el límite de ancho pequeño, este correlador admite un OPE en términos de operadores locales de la CFT replicada. El OPE Euclídeo es continuado analíticamente al espacio de Minkowski. Tomando el

¹Un análisis similar del OPE de operadores twist fue hecho con otro propósito en [90].

²No debe confundirse a los operadores de twist con el twist de un operador. El twist τ de un operador se define como la resta de su dimensión conforme Δ y su espín s : $\tau = \Delta - s$. Por otra parte, los operadores de twist son operadores que podemos definir en cualquier teoría de campos replicada. Estos implementan la simetría en la teoría replicada de intercambiar los campos entre las réplicas. En dependencia de la región en donde actúen, toman un operador $\phi_i(x)$, localizado en x y de la copia i de los campos de la teoría, y lo mapea al operador $\phi_{i+1}(x)$, localizado en el mismo punto x pero perteneciente a la copia $i + 1$ de las réplicas de los campos de la teoría original.

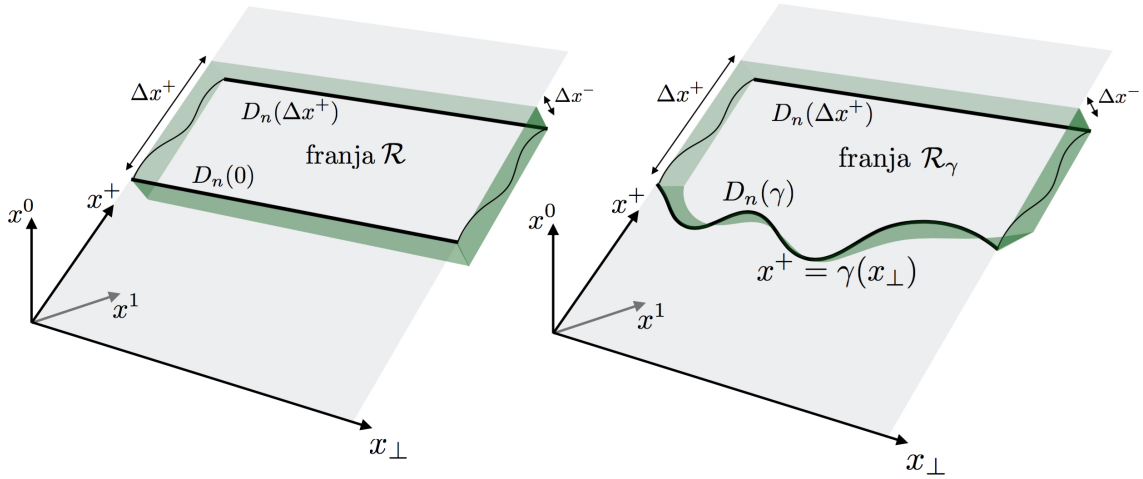


Figura 5.4: Izquierda: operadores de twist $D_n(\Delta x^+)$ y $D_n(0)$ en el espacio de Minkowski asociados a los bordes de una franja \mathcal{R} de bordes paralelos y rectos. Derecha: operadores de twist $D_n(\Delta x^+)$ y $D_n(\gamma)$ en el espacio de Minkowski asociados a los bordes de una franja \mathcal{R}_γ con el borde inferior curvo pero sobre el plano nulo (curva γ).

límite $\Delta x^- \rightarrow 0$, Δx^+ fijo, se tiene que [93]

$$D_n(\Delta x) D_n(0) \sim \exp \left[(1-n) \sum_{i=1}^n \sum_k \int d^{d-2} x^\perp \int_0^{\Delta x^+} dx^+ \right. \quad (5.3.1)$$

$$\left. \frac{1}{|\Delta x^- x^+|^{\frac{1}{2}(d-2-\Delta_k+s_k)}} (x^+)^{s_k-1} \times \mathcal{O}_{\Delta_k, s_k}^i(x^+, x^\perp) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \right].$$

La integral sobre x^+ refleja el hecho de que todos los operadores sobre la misma línea nula pueden contribuir al OPE. La invariancia de traslación en las direcciones paralelas a la franja prohíbe cualquier dependencia no trivial en x^\perp . El factor de $(1-n)$ hace que este operador tienda a la identidad para $n \rightarrow 1$.

Aquí la primera suma en el exponente es por el índice i de las diferentes copias de los campos de la teoría original n -veces replicada, y sumamos sobre los operadores distintos de la teoría con el índice k . Los términos siguientes representados por ... contienen productos de los campos de copias diferentes. Δ_k es la dimensión conforme del operador, y s_k es el espín del campo de tipo k ; autovalor del operador de boost en el plano (x^0, x^1) . Como los operadores de twist no tienen ni dimensión ni espín, todas las potencias en esta expansión vienen fijadas de pedir dimensión y espín total igual a cero en cada término. Podemos enfocarnos en la contribución principal de espín máximo $\mathcal{O}_{+, \dots, +}$ pues $\Delta x^- \rightarrow 0$. El límite nulo es controlado por el twist $\tau \equiv \Delta - s$. En orden de comprender mejor esta expresión, es útil recalcar que los valores de Δ y s (autovalores de los operadores de dilatación y boost J^{01} respectivamente) para x^+, x^-, x^\perp son $(\Delta, s) = (-1, -1), (-1, 1), (-1, 0)$ respectivamente. Por ello $\tau(x^+) = 0$, $\tau(x^-) = -2$, $\tau(x^\perp) = -1$. Además, la cota de unitariedad sobre operadores primarios

de espín $s \geq 1$ (simétricos y de traza cero) nos impone que $\tau \geq d - 2$. Las corrientes conservadas tienen $\Delta = d - 1$, $s = 1$, y saturan la cota. Operadores en representaciones que no son simétricas o de traza cero pueden tener $\frac{1}{2}(d - 2) < \tau \leq d - 2$. Por último, operadores escalares pueden tener $\frac{1}{2}(d - 2) \leq \Delta \leq d - 2$ y con esto τ puede estar en ese mismo rango para $s = 0$ ³.

La diferencia de entropías entre un estado $|\psi\rangle$ y el vacío viene dada por

$$\Delta S = \lim_{n \rightarrow 1} (1 - n)^{-1} \log \frac{\langle \psi | D_n(\Delta x) D_n(0) | \psi \rangle}{\langle 0 | D_n(\Delta x) D_n(0) | 0 \rangle}. \quad (5.3.2)$$

Para determinar el Hamiltoniano modular necesitamos calcular $\Delta\langle H \rangle = \Delta S$ para pequeñas desviaciones del vacío (primera ley). El conocimiento de $\Delta\langle H \rangle$ para cualquier valor de la desviación, fija el Hamiltoniano modular de forma única. Por lo tanto, en el límite $n \rightarrow 1$ debemos enfocarnos en contribuciones a la entropía proporcionales a un solo operador de la CFT original. Estas son las partes de ΔS que son lineales en la matriz densidad, y por ello iguales en conjunto a $\Delta\langle H \rangle$, que es lineal en las matrices densidad. Esto nos da

$$\Delta\langle H \rangle = \sum_k \int d^{d-2} x^\perp \int_0^{\Delta x^+} dx^+ \frac{1}{|\Delta x^- x^+|^{\frac{1}{2}(d-2-\Delta_k+s_k)}} (x^+)^{s_k-1} \langle O_{\Delta_k, s_k}^i(x^+, x^\perp) \rangle. \quad (5.3.3)$$

El término con ... en (5.3.2) producirá términos no lineales en la matriz densidad, y, aun cuando estos puedan contribuir a ΔS para estados genéricos, no contribuyen para determinar el Hamiltoniano modular.

Necesitamos ahora estudiar qué tipo de operadores \mathcal{O} pueden aparecer en el OPE de arriba. Operadores con $\tau > d - 2$ no contribuirán en el límite nulo $\Delta x^- \rightarrow 0$. Con $\tau = d - 2$ genéricamente tenemos corrientes conservadas de espín uno (que no pueden aparecer por simetría CPT) y el tensor de energía momentos. Para $\frac{1}{2}(d - 2) < \tau \leq d - 2$ podríamos tener, como se dijo anteriormente, operadores con representación no simétrica, pero estos tendrían que aparecen de a pares, con lo cual $\tau > d - 2$. La última posibilidad es operadores escalares con $\frac{1}{2}(d - 2) \leq \Delta \leq d - 2$. Estos darían contribuciones divergentes al OPE y [93] se restringió a teorías sin estos operadores. Notemos, sin embargo, que no podemos fijar la dependencia en x^+ de estas contribuciones escalares, o, de otra forma, la integral en (5.3.1) requiere que $s \geq 1$. Estos en principio podrían ocurrir en el borde de la franja, pero en ese caso podrían absorberse en la misma definición de los operadores de twist asociados a estos bordes. La forma del Hamiltoniano modular para el caso de Rindler elimina esta ambigüedad en los operadores de twist. Por lo tanto, los operadores escalares están también ausentes en el OPE de los ope-

³Para una discusión reciente sobre OPE en el límite nulo y más referencias al respecto véase por ejemplo [185].

radores de twist, y solo el tensor de energía momentos (y sus descendientes) pueden aparecer. En este caso, (5.3.3) nos lleva al Hamiltoniano modular [93]

$$H = 2\pi \int d^{d-2}x^\perp \int_0^{\Delta x^+} dx^+ \Delta x^+ g(x^+/\Delta x^+) T_{++}(x^- = 0, x^+, x^\perp). \quad (5.3.4)$$

La función $g(x)$ viene de sumar sobre todos los descendientes y fue estudiada en [93].

5.3.2. Hamiltonianos modulares para bordes arbitrarios sobre el plano nulo

Ahora tomaremos el límite de Δx^+ grande y permitiremos bordes arbitrarios $x^+ = \gamma(x^\perp)$ sobre el plano nulo. El resultado clave de (5.3.4) es la independencia de las contribuciones de las líneas nulas. Esto sugiere que la factorización entre líneas nulas debe también ocurrir cuando consideramos un borde arbitrario γ para la franja que estudiamos anteriormente, permitiéndonos escribir el Hamiltoniano modular como una suma por diferentes rayos nulos. Veremos, analizando nuevamente el OPE de operadores de twist, que esto es correcto.

Regresemos a (5.3.1), permitiendo ahora un borde arbitrario $x^+ = \gamma(x^\perp)$. En el exponente del OPE podemos ahora tener derivadas de γ y otras cantidades geométricas contraídas con operadores tensoriales,

$$\partial_a \gamma \mathcal{O}^a + \partial_a \partial_b \gamma \mathcal{O}^{ab} + \partial_a \gamma \partial_b \gamma V^{ab} + \dots \quad (5.3.5)$$

donde $a = 2, \dots, d-1$ son los índices en las direcciones perpendiculares x^\perp . El punto clave es que las derivadas ∂_a tienen twist uno (γ tiene twist cero), y para compensar, los operadores deben tener twist menor que $d-2$. Esto limita fuertemente los operadores que pueden aparecer en el OPE. Por ejemplo, el operador vectorial \mathcal{O}^a , o cualquier otro tensor simétrico, tiene $\tau > d-2$, por lo que no pueden aparecer. Nos quedan entonces los tensores antisimétricos, que pueden tener $\tau < d-2$. Considérese entonces la contribución dominante, que viene del tensor de rango-2 contraído: $\partial_{[a} \gamma \partial_{b]} \gamma V^{[ab]}$. Este operador necesita tener twist exactamente igual a $d-4$. Para una CFT genérica interactuante este no es el caso. Además, como por unitariedad $\tau > (d-2)/2$, en una teoría interactuante esto solo puede ocurrir para dimensión $d \geq 7$, por lo que para $d \leq 6$ estas correcciones no están presentes. De forma intuitiva, en el límite de Δx^- pequeño los dos operadores de twist están muy cercanos y su OPE es solo sensitivo a la información del UV, e insensitivo a variaciones suaves de la forma de γ .

Habiéndose descartado estas posibles contribuciones por tener una γ variable, tomamos el límite $\Delta x^+ \rightarrow \infty$, donde el borde futuro de la franja \mathcal{R}_γ va a infinito; ver Figura 5.4. En este caso $\Delta x^+ g(x^+/\Delta x^+) \rightarrow x^+$, que es el resultado de Rindler rayo a

rayo. Sumando por x^\perp obtenemos

$$H_\gamma = 2\pi \int d^{d-2}x^\perp \int_{\gamma(x^\perp)}^\infty dx^+ (x^+ - \gamma(x^\perp)) T_{++}(x^+, x^\perp), \quad (5.3.6)$$

salvo una constante aditiva.

Tenemos aquí, sin embargo, una aparente paradoja al tomar el límite $\Delta x^+ \rightarrow \infty$. Para Δx^+ fijo en el límite $\Delta x^- \rightarrow 0$ tenemos, para una teoría interactuante en $d > 2$, que $\Delta S = \Delta H$, y por ello, la entropía relativa $S(\rho^1 || \rho^0) = 0$ [93]. Esto se debe a que el producto de operadores en copias diferentes en (5.3.2) debe tener twist menor o igual a $d - 2$ para sobrevivir al límite $\Delta x^- \rightarrow 0$. Como hemos visto esto no es posible, a no ser que $d = 2$, en cuyo caso el tensor de energía-momento tiene twist cero y el producto de los tensores de energía-momento en copias distintas sobrevive al límite, o en el caso de una teoría libre en donde el producto de dos campos libres de twist $(d - 2)/2$ en copias diferentes puede tener twist $d - 2$, como por ejemplo el producto de los dos operadores $\partial_+ \phi$.

Sin embargo, cuando tomamos el límite $\Delta x^+ \rightarrow \infty$ y hacemos el mapeo conforme a la esfera, la imagen de la franja envolvería a todo el cono. La entropía relativa debe ser en este caso distinta de cero, con lo cual $\Delta S \neq \Delta H$. Debe ocurrir que, o bien ΔH , o bien ΔS , tiene una discontinuidad en este límite.

Examinemos primero el comportamiento de ΔH al tomar el límite. La pregunta es si el OPE (5.3.1) restringido a operadores de la teoría original, que son los que contribuyen a ΔH , (en oposición a otros términos en el OPE dados por la multiplicación de operadores de copias distintas), está bien definido para x^+ grande. El valor de expectación de los operadores para x^+ grande viene determinado por la CFT en el cilindro como sigue. Del mapeo (5.2.5), $x^+ \rightarrow \infty$ se corresponde con un punto en el cilindro $t_c + \psi \rightarrow \pi/2$. Requerimos que $\langle \mathcal{O}_{cyl} \rangle$ sea finito en ese punto. El operador en el espacio de Minkowski se obtiene de $\mathcal{O}_{Mink} = \omega^\Delta \mathcal{O}_{cyl}$. De (5.2.7), $\omega \sim 1/x^+$ cuando $x^+ \rightarrow \infty$, con lo que obtenemos que

$$\langle \mathcal{O}_{Mink} \rangle \sim \frac{1}{(x^+)^\Delta}. \quad (5.3.7)$$

Sustituyendo este comportamiento en (5.3.1), encontramos una dependencia en x^+ de la forma $(x^+)^{s_k - \Delta_k - 1}$. Como $\Delta_k - s_k \geq 0$, el comportamiento para x^+ grande está acotado. Por lo tanto $\Delta \langle H \rangle$ no tiene discontinuidad al tomar el límite de $x^+ \rightarrow \infty$ y $x^- \rightarrow 0$, y (5.3.6) está justificada.

Debe ser entonces que la entropía tiene una discontinuidad en este límite para teorías interactuantes en $d > 2$. La razón para esperar esto es que el álgebra de operadores localizados en la región debe cambiar abruptamente. Como mostramos debajo, el problema aquí es el de un orden de límites. De hecho, para una CFT interactuante

no hay ningún operador que pueda ser localizado en una superficie acotada sobre el plano nulo⁴, como la franja que hemos considerado. Pero tomando el límite $\Delta x^+ \rightarrow \infty$, $\Delta x^- \rightarrow 0$ de cierta forma, el álgebra total de operadores puede ser recuperada. Esto se ve de forma más clara en el cono nulo. Denotemos por \mathcal{P}_γ todos los puntos del plano \mathcal{P} al futuro de $\gamma(x^\perp)$. Estos son conformemente mapeados a la superficie $\mathcal{C}(\mathcal{P}_\gamma)$ que envuelve todo el pasado del cono nulo de un punto hasta una superficie determinada por γ . Por causalidad, el álgebra de operadores es el álgebra de la región $\mathcal{C}(\mathcal{P}_\gamma)$, que tiene como horizonte futuro este cono nulo. Esta es el álgebra de todos los operadores que se obtienen de los operadores de campo en $\mathcal{C}(\mathcal{P}_\gamma)$ al suavizarlos con funciones de prueba con soporte espacio-temporal en la región $\mathcal{C}(\mathcal{P}_\gamma)$. Como tenemos ahora operadores para distinguir los dos estados, esperamos que $S(\rho^1 || \rho^0) > 0$.

Para entender mejor cómo ocurre esto, estudiamos el comportamiento de operadores suavizados en una región con $(\Delta x^+, \Delta x^-)$ finitos. Suavizamos los operadores con una función de prueba $\alpha(x)$, y calculamos la norma del vector que se obtiene al actuar con este operador sobre el vacío. Si el operador al actuar produce estados de norma finita, consideraremos que pertenece al álgebra de operadores sobre el espacio de Hilbert de la teoría.

$$||\mathcal{O}_\alpha|0\rangle||^2 = \int d^d x d^d y \alpha(x)^* \alpha(y) \langle \mathcal{O}(x)^\dagger \mathcal{O}(y) \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |\alpha(p)|^2 \langle \mathcal{O}(p)^\dagger \mathcal{O}(p) \rangle. \quad (5.3.8)$$

Por simplicidad, enfoquémonos en un campo escalar de dimensión Δ , en cuyo caso

$$\langle \mathcal{O}(p)^\dagger \mathcal{O}(p) \rangle = \frac{1}{(p_+ p_- + p_\perp^2)^{\frac{d}{2} - \Delta}} \quad (5.3.9)$$

en signatura Euclídea.

Primero, si queremos localizar el operador en una superficie de tiempo constante, α tendría soporte en una región de tiempo constante y sería independiente de p_0 , y todas las posible divergencias UV de la norma serían de la forma $||\mathcal{O}_\alpha|0\rangle||^2 \sim \int dp_0/p_0^{d-2\Delta}$. En una teoría interactuante podríamos tener operadores sobre una superficie a tiempo constante si $\Delta < \frac{d-1}{2}$. Consideremos ahora el límite nulo, donde la región se boostea a $\Delta x^- \rightarrow 0$. En este caso, α es independiente de p_- , una potencial divergencia UV vendría de $||\mathcal{O}_\alpha|0\rangle||^2 \sim \int dp_-/p_-^{d/2-\Delta}$. Esto podría ser finito si $\Delta < \frac{d-2}{2}$, lo cual está prohibido por unitariedad. Este análisis puede extenderse a espín distinto de cero [93]. Un cálculo completo muestra que solo ciertos operadores de las teorías libres, como $\partial_+ \phi$ pueden ser localizados en la superficie nula. Concluimos entonces que, en el caso general, no se pueden generar operadores (a partir de los operadores de campo) con

⁴Aquí por operadores queremos decir operadores en el espacio de Hilbert, y no operadores de campos. Estos últimos son distribuciones a partir de las cuales, actuando sobre funciones de prueba, se obtienen los operadores.

funciones de prueba con soporte sobre la superficie nula.

Veamos ahora el caso de interés $\Delta x^- \rightarrow 0$ y $\Delta x^+ \rightarrow \infty$. Un Δx^- finito implica que la función de prueba tiene que tener soporte en $|p_-| < 1/\Delta x^-$. Tomemos una α de la forma $\alpha(p) = \Theta((1/\Delta x^-)^2 - p_-^2)\alpha(p_+, p_\perp)$, con Θ la función escalón. En este caso

$$\|\mathcal{O}_\alpha|0\rangle\|^2 \sim \int^{1/\Delta x^-} \frac{dp_-}{p_-^{d/2-\Delta}} \int \frac{dp_+}{p_+^{d/2-\Delta}} \left(\int d^{d-2}p_\perp \alpha(p_+, p_\perp) \right). \quad (5.3.10)$$

Para funciones de prueba con soporte en una Δx^+ grande tenemos que

$$\|\mathcal{O}_\alpha|0\rangle\|^2 \sim \frac{1}{(\Delta x^- \Delta x^+)^{\Delta-(d-2)/2}}. \quad (5.3.11)$$

En este caso, en el límite $\Delta x^- \rightarrow 0$ y $\Delta x^+ \rightarrow \infty$ con $\Delta x^- \Delta x^+$ fijo, \mathcal{O}_α permanece como un operador bien definido y perteneciente al álgebra. La presencia de estos operadores explica el comportamiento de la entropía en el límite nulo. Tenemos que $\Delta S = \Delta H$ si tomamos el límite $\Delta x^- = 0$ primero, y tenemos que $\Delta S \neq \Delta H$ si tomamos el límite $\Delta x^+ = \infty$, $\Delta x^- = 0$, fijando el producto $\Delta x^- \Delta x^+$.

5.3.3. Hamiltonianos modulares en el cono nulo

Para calcular la forma general del Hamiltoniano modular en el cono nulo conviene comenzar con la expresión para la franja finita (5.3.4), en lugar de con el resultado para regiones semi-infinitas (5.3.6). La función $g(x)$ para $x \in (0, 1)$ es adimensional, simétrica ante $x \rightarrow (1 - x)$, y se acerca a x para x pequeña (o a $(1 - x)$ para $x \rightarrow 1$).

Escribimos (5.3.4) como una integral sobre las direcciones transversales en la superficie nula de una cantidad λ que depende del intervalo nulo

$$dH = 2\pi dA_\perp \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \Delta\lambda g(\lambda/\Delta\lambda) T_{\mu\nu}(\lambda, y) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (5.3.12)$$

donde λ es un parámetro afín a lo largo de la dirección nula y $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$. Analicemos cómo transforma esta cantidad ante transformaciones conformes. Primero hacemos una transformación de coordenada en la que la métrica de Minkowski en las nuevas coordenadas x^μ queda

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (5.3.13)$$

Este paso es solo una transformación de coordenadas que no cambia la expresión para dH en el intervalo nulo, siempre que usemos la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y el correspondiente $\tilde{T}_{\mu\nu}$ en estas nuevas coordenadas.

$$dH = 2\pi d\tilde{A}_\perp \int_{\tilde{\lambda}_0}^{\tilde{\lambda}_1} d\tilde{\lambda} \Delta\tilde{\lambda} g(\tilde{\lambda}/\Delta\tilde{\lambda}) \tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{\lambda}, y) \frac{dx^\mu}{d\tilde{\lambda}} \frac{dx^\nu}{d\tilde{\lambda}}. \quad (5.3.14)$$

Podemos eliminar el prefactor ω^2 en la métrica haciendo una transformación conforme (con lo cual la métrica sería $\eta_{\mu\nu}$). Esto obliga a cambiar el tensor de energía momentos, que transforma como

$$T_{\mu\nu} = \omega^{d-2} \tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (5.3.15)$$

Debido al cambio en la métrica el elemento transversal de área cambia como

$$dA_{\perp} = \omega^{-(d-2)} d\tilde{A}_{\perp}. \quad (5.3.16)$$

El parámetro afín inicial no es más afín en las nuevas coordenadas, y tenemos el cambio [186]

$$d\lambda = c \omega^{-2} d\tilde{\lambda} \quad (5.3.17)$$

con c arbitrario. Sustituyendo estos cambios en la ecuación (5.3.14) obtenemos

$$dH = 2\pi dA_{\perp} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \Delta\lambda \left[\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda' \omega^2(\lambda')}{(\lambda_1 - \lambda_0) \omega^2(\lambda)} g \left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \omega^2(\lambda')}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda' \omega^2(\lambda')} \right) \right] T_{\mu\nu}(\lambda, y) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}. \quad (5.3.18)$$

La función entre corchetes es la nueva función g , que en general va a cambiar por la transformación conforme. Para una transformación conforme especial tenemos que

$$\omega(x) = (1 + 2(x \cdot c) + (x \cdot x)(c \cdot c))^{-1}, \quad (5.3.19)$$

con c un vector fijo. Necesitamos la expresión para $\omega(x)$ a lo largo de una línea nula parametrizada por $x = x_0 + \eta\lambda$, con η un vector nulo. Sustituyendo en (5.3.19) obtenemos

$$\omega(\lambda) = (c_0 + c_1\lambda)^{-1}, \quad (5.3.20)$$

con c_0 y c_1 dos constantes. Podemos cambiar la parametrización afín de forma que el origen esté en el origen del sistema de coordenada x^{μ} . Este punto es la punta del cono nulo. Con esta elección tenemos

$$\omega(\lambda) = \lambda^{-1}. \quad (5.3.21)$$

Usando esta obtenemos

$$dH = 2\pi dA_{\perp} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \Delta\lambda g^*((\lambda - \lambda_0)/\Delta\lambda) T_{\mu\nu}(\lambda, y) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}, \quad (5.3.22)$$

con la nueva función g^* dada por

$$g^*(u) = \frac{((1-r)u + r)^2}{r} g\left(\frac{u}{(1-r)u + r}\right), \quad (5.3.23)$$

con $r = \lambda_0/\lambda_1$ un número entre 0 y 1. Nótese que g^* no es simétrica ante reflexiones para $r \neq 0, 1$. Si $\lambda_1 \sim \lambda_0 \gg \lambda_1 - \lambda_0$, lo que corresponde a $r \rightarrow 1$, obtenemos $g^*(u) \rightarrow g(u)$ como es de esperar, dado que para un intervalo nulo lejos de la punta del cono la superficie es aproximadamente plana y g no se modifica. En el caso opuesto, $\lambda_0 \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$, obtenemos $g^*(u) \rightarrow u(1-u)$ para cualquier g , usando $g(u) \sim u$ para u pequeño.

Para cualquier región sobre el cono nulo que encierre o envuelva a la punta del cono tenemos, usando coordenadas polares λ, Ω sobre el cono,

$$H_\gamma = 2\pi \int d\Omega \int_0^{\gamma(\Omega)} d\lambda \lambda^{d-2} \frac{\lambda(\gamma(\Omega) - \lambda)}{\gamma(\Omega)} T_{\lambda\lambda}, \quad (5.3.24)$$

donde $T_{\lambda\lambda} = T_{\mu\nu}(\lambda, y) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, λ es un parámetro afín sobre los rayos nulos, $\lambda = 0$ corresponde a la punta del cono, y $\gamma(\Omega)$ es una función de las coordenadas angulares que determina el borde de la región.

5.3.4. Extensión a deformaciones masivas de la CFT

Hasta ahora hemos considerado los Hamiltonianos modulares para CFTs; hemos establecido el resultado (5.3.6) para un borde arbitrario sobre el plano nulo, y usado las transformaciones conformes para encontrar el Hamiltoniano modular (5.3.24) para regiones con borde arbitrario sobre el cono nulo. Queremos ahora considerar deformaciones relevantes de la CFT, caracterizadas por algún parámetro de masa m .

El resultado para el cono (5.3.24) no se aplicará a teorías masivas, y esperamos comportamientos diferentes en dependencia de si el tamaño de la región es mayor o menor que $1/m$. Intuitivamente, sin embargo, la fórmula para el plano nulo (5.3.6) debería ser también aplicable al caso masivo. El análisis de la Sección 5.3.2 mostró como el OPE de los operadores de twist es insensitivo a deformaciones IR, al menos para el caso de deformaciones de la forma de la región.

Consideremos la perturbación de la CFT

$$S = S_{CFT} + \int d^d x g \mathcal{O} \quad (5.3.25)$$

por un operador de dimensión $\Delta < d$ en el UV. Este desencadena un flujo del GR caracterizado por la escala $m \sim g^{1/(d-\Delta)}$. Cuando $g \rightarrow 0$ debemos reobtener (5.3.6), y para el caso plano de Rindler $\gamma = \text{const}$, tenemos el resultado de Rindler, válido para cualquier teoría. Para incluir en el OPE (5.3.1) los efectos de la masa, permitimos (solamente) potencias positivas de g y/o derivadas de $\gamma(x^\perp)$. Las posibles correcciones debido a la forma no constante de γ están ausente como en el caso anterior, así que nos enfocamos en los efectos de la masa. Según la teoría de perturbaciones conformes,

la masa podría inducir nuevos operadores en el OPE de la forma

$$g^2 \int d^{d-2}x^\perp \int dx^+ \frac{1}{|\Delta x^- x^+|^{a_k}} (x^+)^{s_k-1} \mathcal{O}_{\Delta_k, s_k} + \dots \quad (5.3.26)$$

Pidiendo que este término sea adimensional, tenemos que

$$\Delta_k - s_k = d - 2 - 2a_k - 2(d - \Delta). \quad (5.3.27)$$

Como $d - \Delta > 0$ y $a_k \geq 0$ (porque tomamos $\Delta x^- \rightarrow 0$), tenemos que $\Delta_k - s_k < d - 2$. Pero esto no puede ocurrir por la discusión anterior. Concluimos entonces que el Hamiltoniano modular (5.3.6) para regiones con borde arbitrario sobre el plano nulo es válida para deformaciones masiva de la CFT.

5.4. Algunas propiedades matemáticas generales de los flujos modulares

En esta sección presentaremos dos teoremas muy importantes sobre flujos modulares [60]. El primero es una propiedad interesante del Hamiltoniano total y los flujos modulares de regiones que son movidas dentro de ellas mismas por el flujo modular de otra región [181, 187].

Teorema 1 (Semi-inclusión modular):

Supongamos que tenemos dos álgebras de von Neumann $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ con un vector común cíclico y separador $|0\rangle$. Sea $U_{\mathcal{M}}(s) = e^{-i\hat{H}_{\mathcal{M}}s}$ el unitario que implementa el flujo modular en \mathcal{M} del estado $|0\rangle$. Sea que el flujo modular de \mathcal{M} mueve a \mathcal{N} dentro de \mathcal{N} para todo valor positivo del parámetro modular $s > 0$,

$$\mathcal{N}(s) = U_{\mathcal{M}}(-s)\mathcal{N}U_{\mathcal{M}}(s) \subset \mathcal{N}, \quad s > 0. \quad (5.4.1)$$

Si esta propiedad se verifica, se dice que se tienen dos álgebras en situación de semi-inclusión modular.

Observación: Es claro que el nombre de “semi” viene de que la condición (5.4.1) se pide solo para tiempos modulares s en la semirecta $s > 0$. Este detalle hace que la definición sea no trivial. Si pedimos lo mismo para $s \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

El contenido del teorema es que si se cumple (5.4.1) se tiene que:

a) La familia de álgebras \mathcal{N}_s es anidada para todo $s \in \mathbb{R}$: $\mathcal{N}_{s_1} \subset \mathcal{N}_{s_2}$ para $s_1 > s_2$, con $\mathcal{N}_{-\infty} = \mathcal{M}$ y $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$. El flujo modular de cualquier miembro de esta familia de

álgebras mueve a los otros miembros de la familia dentro de si mismos, en particular, para el flujo modular de \mathcal{N}

$$U_{\mathcal{N}}(-u)\mathcal{N}_sU_{\mathcal{N}}(u) = \mathcal{N}_{\frac{1}{2\pi}\log(1+e^{2\pi u}(e^{2\pi s}-1))}, \quad (5.4.2)$$

para todo s, u tal que el argumento en el logaritmo en el miembro derecho es positivo.

b) La diferencia entre dos Hamiltonianos modulares de dos regiones incluidas es un operador positivo⁵ $G = \hat{H}_{\mathcal{M}} - \hat{H}_{\mathcal{N}} \geq 0$, y tenemos el álgebra de Lie

$$[\hat{H}_{\mathcal{M}}, \hat{H}_{\mathcal{N}}] = i 2\pi(\hat{H}_{\mathcal{M}} - \hat{H}_{\mathcal{N}}) = i 2\pi G. \quad (5.4.3)$$

c) Los unitarios $T_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(\tau) = e^{-iG\tau}$ generados por el operador positivo G son llamados traslaciones modulares. Se tiene que estos mueven las álgebras \mathcal{N}_s dentro de ellas mismas según la fórmula

$$T(-\tau)\mathcal{N}_sT(\tau) = \mathcal{N}_{\frac{1}{2\pi}\log(e^{2\pi s}+2\pi\tau)}. \quad (5.4.4)$$

En particular, llamando $\mathcal{M}_{\tau} = T(-\tau)\mathcal{M}T(\tau)$, $\tau \geq 0$ a los trasladados de \mathcal{M} tenemos que

$$\mathcal{M}_{\tau} = \mathcal{N}_{\frac{1}{2\pi}\log(2\pi\tau)}. \quad (5.4.5)$$

Por lo tanto, las traslaciones modulares mueven las álgebras dentro de ellas para $\tau > 0$, y $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{(2\pi)^{-1}} = \mathcal{N}$.

d) Se tiene la siguiente relación entre los flujos y las traslaciones modulares

$$U_{\mathcal{M}}(s)U_{\mathcal{N}}(-s) = T\left(\frac{1}{2\pi}(e^{2\pi s} - 1)\right). \quad (5.4.6)$$

Para poder tener una idea del significado de los varios puntos de este teorema, veamos un ejemplo simple en QFT. Primero, como vimos en la Sección (2.2.1), en QFT el álgebra de cualquier región que no sea todo el espacio tiene al vacío como un vector cíclico y separador (Teorema de Reeh-Schlieder). Tomemos como álgebras dos cuñas de Rindler, una incluida dentro de la otra y compartiendo el mismo plano nulo como futuro. En la notación sobre el plano nulo podemos definir estas por $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = c$, para cualquier $c > 0$, de forma que $\gamma_2 \subset \gamma_1$. Teniendo en cuenta que el flujo modular para Rindler son flujos de boosts, y que estos se representan como dilataciones sobre las líneas nulas, se sigue que γ_1 y γ_2 están en una situación de semi-inclusión modular.

⁵Esto siempre es así para regiones incluidas, se cumpla la condición de semi-inclusión modular o no. Para una discusión de una derivación de esto a partir de la monotonidad de la entropía relativa ver [35].

Se tiene entonces la familia de álgebras

$$\gamma_2(s) = c e^{2\pi s}. \quad (5.4.7)$$

Estas son cuñas de borde paralelo y cuyo futuro nulo yace sobre el mismo plano nulo. El generador de transformaciones modulares es la diferencia entre los dos generadores de boost $2\pi K_1$ y $2\pi K_2$ de γ_1 y γ_2 respectivamente. Su diferencia es la traslación en la dirección nula

$$G = 2\pi c P_\mu \xi^\mu, \quad (5.4.8)$$

que es un operador positivo. Todas las relaciones de arriba se obtienen en este caso del álgebra de Poincaré. Por ejemplo, la traslación de las γ_1 son

$$\gamma_1(\tau) = 2\pi c \tau, \quad (5.4.9)$$

lo que está de acuerdo con (5.4.5). De hecho, para recordar las fórmulas de los teoremas sobre semi-inclusión modular, lo más sencillo es pensar en la acción de boosts y traslaciones nulas.

El segundo teorema que queremos introducir es sobre la unicidad de los flujos unitarios con generador positivo [60, 188, 189].

Teorema 2: Supongamos que tenemos una familia anidada de álgebras de von Neumann \mathcal{N}_a , $a \in R$, con $\mathcal{N}_a \subset \mathcal{N}_b$ para $a > b$, actuando en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , con vector cíclico y separador $|0\rangle$, y un grupo uniparamétrico de unitarios $T(a)$ con generador positivo, que deja invariante a $|0\rangle$ y traslada las álgebras como

$$\mathcal{N}_a = T(-a)\mathcal{N}_0T(a). \quad (5.4.10)$$

Entonces cualquier otro grupo uniparamétrico de unitarios con generador positivo, que deje invariante a $|0\rangle$ y que traslade las álgebras como en (5.4.10), coincide con $T(a)$.

5.5. Hamiltonianos modulares sobre el plano nulo II. El álgebra de los H_γ

En esta sección presentamos una derivación de (5.0.4) basada en los dos teoremas anteriores. En el proceso, encontraremos un álgebra de dimensión infinita de tipo Virasoro pero para QFTs en dimensión d , que actúa de forma natural sobre el plano nulo.

5.5.1. Álgebra de Hamiltonianos modulares en el plano nulo

Para comenzar, consideremos el conjunto de cuñas de Rindler γ cuyo borde futuro yace en el mismo plano nulo \mathcal{P} . Si el filo de estas cuñas pasa por el origen, estas pueden ser identificadas por el vector nulo futuro y ortogonal al filo $d - 2$ dimensional de γ y que no está en \mathcal{P} . Llamamos η a este vector nulo, normalizado como $\eta \cdot \xi = 1$, con $\xi = (1, 1, 0, \dots, 0)$, ortogonal a \mathcal{P} . El operador modular correspondiente viene dado por el operador generador de boosts que deja a la cuña invariante,

$$\hat{H}_{(\eta)} = 2\pi J^{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu, \quad (5.5.1)$$

donde hemos usado el álgebra de Poincaré

$$[P_\lambda, J_{\mu\nu}] = i(g_{\nu\lambda} P_\mu - g_{\mu\lambda} P_\nu). \quad (5.5.2)$$

Usando que

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}), \quad (5.5.3)$$

obtenemos el álgebra de los Hamiltonianos modulares de las cuñas con futuro sobre el plano nulo \mathcal{P} ,

$$[\hat{H}_{(\eta,l)}, \hat{H}_{(\eta',l')}] = 2\pi i (\hat{H}_{(\eta,l)} - \hat{H}_{(\eta',l')}). \quad (5.5.4)$$

Esta coincide con (5.4.3) para cuñas incluidas, pero se extiende también al caso de cuñas que se intersectan.

Queremos generalizar este resultado a regiones más generales con borde sobre el plano nulo. Definamos los siguientes operadores integrando sobre la línea nula paralela a ξ

$$P_{x^\perp} = \int dx^+ T_{++}(x^+, x^\perp), \quad (5.5.5)$$

$$K_{x^\perp} = \int dx^+ x^+ T_{++}(x^+, x^\perp). \quad (5.5.6)$$

Estos operadores están a distancia espacial para x^\perp distintos, y su conmutador tiene soporte solo en puntos coincidentes en la coordenada x^\perp . El conmutador, además, tiene que conmutar con todos los operadores espacialmente separados de la línea nula en cuestión, por lo que tiene soporte solo en esta línea nula. Otra característica es que P_{x^\perp} es invariante ante traslaciones a lo largo de la línea nula, mientras que K_{x^\perp} cambia antes estas traslaciones por un factor aditivo proporcional a P_{x^\perp} . El conmutador es entonces invariante ante traslaciones nulas. El conmutador tiene dimensión $2d - 3$ y

espín (autovalor de boost) 1. Podemos escribir entonces que,

$$[K_{x^\perp}, P_{x^\perp'}] = \delta(x^\perp - x^{\perp'}) O_0(x^\perp) + \partial_i \delta(x^\perp - x^{\perp'}) O_1^i(x^\perp) + \dots \quad (5.5.7)$$

$O_0(x^\perp)$ es un operador localizado sobre la línea nula, con dimensión $\Delta = d - 1$, invariante de traslación nula, y de espín $s = 1$. Tiene twist $\tau = \Delta - s = d - 2$. Podemos expresarlo como una expansión de operadores locales sobre la línea nula,

$$O_0 = \int dx^+ \Phi(x^+) + \int dx^+ \int dx'^+ \Phi_1(x^+) \Phi_2(x'^+) f(x^+ - x'^+) + \dots \quad (5.5.8)$$

La coodenada x^+ tiene dimensión -1 , espín -1 , y twist 0 .

Necesitamos operadores de twist exactamente igual a $d - 2$. El twist de T_{++} es $d - 2$ y, como hemos recalado en la Sección 5.3, será el único operador con twist exactamente igual a $d - 2$. Concluimos que la única posibilidad es $\Phi = c T_{++}$. Concluimos que no pueden haber otros términos en (5.5.8).

Si incluimos derivadas como en el segundo término en (5.5.7) la situación empeora; las condiciones impuestas por las dimensiones y el twist reducen aun más los posibles operadores que pueden aparecer. No tenemos operadores con twist menor que $d - 2$ para usar como O_1^i . Representaciones antisimétricas multiplicando las derivadas de la función delta están ausentes por el mismo motivo que se dió en la Sección 5.3.2.

Calibrando el conmutador con el de los momentos y boosts $[K_1, P_\xi] = -i P_\xi$, con $P_\xi = \xi \cdot P$, obtenemos

$$[K_{x^\perp}, P_{x^\perp'}] = -i P_{x^\perp} \delta(x^\perp - x^{\perp'}). \quad (5.5.9)$$

Usando esto en los operadores que definimos arriba (5.0.4) obtenemos una generalización del álgebra (5.5.4) válida para todas las superficies γ

$$[\hat{H}_{\gamma_1}, \hat{H}_{\gamma_2}] = 2\pi i (\hat{H}_{\gamma_1} - \hat{H}_{\gamma_2}). \quad (5.5.10)$$

El álgebra (5.5.10) no admite extensiones centrales.

5.5.2. Un álgebra de Virasoro en d dimensiones

Es muy interesante notar que el argumento de que el conmutador de P_{x^\perp} y K_{x^\perp} es una integral de T_{++} sobre la línea nula también se aplica a operadores más generales de la forma

$$O_f(x^\perp) = \int dx^+ f(x^+) T_{++}(x^+, x^\perp), \quad (5.5.11)$$

con $f(x^+)$ una función arbitraria no lineal. Debemos tener entonces un álgebra de la forma

$$[O_f(x^\perp), O_g(x'^\perp)] = \delta(x^\perp - x'^\perp) O_h(x^\perp), \quad (5.5.12)$$

para alguna $h(f, g)$ que depende de f y g . De hecho, un cálculo directo nos da que $h = f'g - g'f$. Tomando funciones que son potencias de x^+ , esta relación es fijada, por la estructura del álgebra de Lie y por análisis dimensional, a ser la del álgebra de Virasoro de una CFT en $d = 2$. Más en detalle, si definimos

$$L_{x^\perp}^n \equiv i \int dx^+ (x^+)^{n+1} T_{++}(x^+, x^\perp), \quad (5.5.13)$$

y hacemos corresponder las dimensiones y los twist, y teniendo en cuenta que el conmutador es proporcional a una delta en la dirección transversal, se obtiene que

$$[L_{x^\perp}^m, L_{y^\perp}^n] = \delta^{d-2}(x^\perp - y^\perp) (m - n) f(m, n) L_{x^\perp}^{m+n}. \quad (5.5.14)$$

Hemos usado la antisimetría del conmutador. La función simétrica $f(m, n)$ queda por ser determinada. La identidad de Jacobi junto con el valor de $[L^{-1}, L^m]$, que puede ser calibrado por el del conmutador con el operador momento, implica que f tiene que ser una constante. De esta forma, llegamos al álgebra de Virasoro infinito dimensional rayo a rayo,

$$[L_{x^\perp}^m, L_{y^\perp}^n] = \delta^{d-2}(x^\perp - y^\perp) (m - n) L_{x^\perp}^{m+n}. \quad (5.5.15)$$

Una extensión central es en principio pensable. Sin embargo, por análisis dimensional, la carga central asociada es divergente UV [80]. Estos operadores transformarían el vacío en estados de energía infinita. Sería muy interesante estudiar alguna versión regularizada en la que la extensión central de esta álgebra de Virasoro tenga sentido y sea útil en el análisis de otros problemas o para describir mejor la estructura de las teorías de campos.

5.5.3. Positividad

Para poder usar el poder de los teoremas de semi-inclusión modular, necesitamos la positividad del operador P_{x^\perp} . Esto fue demostrado en [37] calculando perturbativamente el Hamiltoniano modular del espacio de Rindler deformado y usando la positividad de la resta de Hamiltonianos modulares de regiones incluidas una dentro de otra [35]. La propiedad $P_{x^\perp} \geq 0$ es equivalente a la condición promediada de energía nula (ANEC) para QFT, que tiene consecuencias interesantes como la de acotar el cociente de las anomalías A y B en $d = 4$ [36]. En esta sección usamos este resultado, pero notamos que las otras derivaciones independientes que ofrecemos para la forma del Hamiltoniano modular (5.0.4), como la de la Sección 5.3, implica este resultado.

La positividad del operador P_{x^\perp} implica que este aniquila el vacío. Para ver esto considérese el operador momento que resulta de integrar los P_{x^\perp} en la dirección transversal. Como el momento aniquila el vacío tenemos que

$$\int dx^\perp \langle 0 | P_{x^\perp} | 0 \rangle = 0. \quad (5.5.16)$$

Por la positividad de P_{x^\perp} tenemos que $\langle 0 | P_{x^\perp} | 0 \rangle = 0$. Esta última relación para un operador positivo implica que

$$P_{x^\perp} | 0 \rangle = 0. \quad (5.5.17)$$

De la ANEC tenemos la positividad de todos los operadores

$$P_f = \int d^{d-2} x^\perp f(x^\perp) \int dx^+ T_{++}(x^+, x^\perp), \quad (5.5.18)$$

con $f(x^\perp) > 0$. La ecuación (5.5.17) nos da entonces que $P_f | 0 \rangle = 0$.

5.5.4. Acción de P_f sobre las álgebras

Los operadores P_f actúan como los generadores de la traslación $x^+ \rightarrow x^+ + f(x^\perp)$ sobre la superficie nula. Para un operador local $\phi(x^+, x^\perp)$ en la superficie nula, la acción de P_f no puede distinguirse de la de $f(x^\perp)P_\xi$, pues este tiene la misma forma que P_f sobre el rayo nulo donde el operador se localiza. La parte de P_f fuera de esta línea nula conmuta con el campo. Más formalmente, el conmutador de P_f con el campo $\phi(x^+, x^\perp)$ de dimensión Δ y espín s tiene que estar localizado y tener dimensión $\Delta + 1$ y espín $s + 1$, y genericamente solo tenemos a $\partial_{x^+} \phi(x^+, x^\perp)$ ⁶. Sobre operadores no localizados en la superficie nula la acción de P_f será no local.

Los operadores de campo en la superficie nula $\bar{\gamma}$ son movidos por la traslación P_f a operadores de campo localizados en la superficie nula $\overline{\gamma + f}$. Como los operadores en el bulk de la región espacio-temporal R_γ conmutan con los operadores de campos en la superficie nula $\bar{\gamma}$ debe suceder entonces que el álgebra trasladada $e^{iP_f} \gamma e^{-iP_f}$ conmuta con los operadores de campo en la superficie nula $\overline{\gamma + f}$ y esto implica que esta álgebra está incluida en $R_{\gamma+f}$. El álgebra $e^{iP_f} \bar{\gamma} e^{-iP_f}$ incluye entonces al álgebra de $R_{\overline{\gamma+f}}$, pero no puede ser más grande, pues en tal caso habrían operadores que no conmutarían con los operadores de campo sobre la superficie $\gamma + f$. De esta forma llegamos a que

$$e^{iP_f} \gamma e^{-iP_f} = \gamma + f. \quad (5.5.19)$$

⁶Si el campo no es primario sino un descendiente, aparecerán derivadas de la f en el conmutador debido a las derivadas de ϕ . Por ejemplo, $[P_f, \partial_{x^\perp_i} \phi]$ puede contener $(\partial_{x^\perp_i} f(x^\perp)) \partial_{x^+} \phi$, como de hecho pasa en el caso de parábolas. En cualquier caso la evolución del álgebra es una traslación en la dirección x^+ .

Llamemos como arriba K_1 , P_ξ a los operadores de boost y traslación nula asociados a la cuña canónica de Rindler W de $x^+ > 0$. El Hamiltoniano modular de esta cuña es $H_W = 2\pi K_1$. Llamemos $U_\gamma(s)$ al flujo modular correspondiente a γ y $U_W(s)$ al correspondiente a W .

Como el flujo U_W actúa localmente (envía operadores locales a operadores locales), podemos saber cómo mueve la región γ ,

$$U_W(-s)\gamma U_W(s) = e^{2\pi s}\gamma. \quad (5.5.20)$$

De la ecuación (5.5.19), esta es la misma acción que la producida por

$$e^{i\tau P_{2\pi\gamma}}\gamma e^{-i\tau P_{2\pi\gamma}} = (1 + 2\pi\tau)\gamma. \quad (5.5.21)$$

Por lo tanto, estos dos grupos de unitarios uniparamétricos, $T_{W,\gamma}(\tau)$ y $e^{-i\tau P_{2\pi\gamma}}$, mueven a los elementos de la familia de γ dentro de sí mismo y en la misma forma.

Podemos usar ahora el Teorema 2 de la Sección 5.4, pues los generadores $P_{2\pi\gamma}$ son positivos y aniquilan el vacío. Tenemos entonces la identidad entre los generadores de las traslaciones modulares

$$G_{W,\gamma} = P_{2\pi\gamma}. \quad (5.5.22)$$

De aquí y del hecho de que los generadores de las traslaciones modulares son justamente la diferencia entre los Hamiltonianos modulares, ecuación (5.4.3), obtenemos finalmente

$$\hat{H}_\gamma = \hat{H}_W - P_{2\pi\gamma}. \quad (5.5.23)$$

Esta es la fórmula (5.0.4) que queríamos probar. El resultado (5.0.2) para H_γ se sigue directamente de esta expresión. Con esta identificación todos los Hamiltonianos modulares de superficies γ actúan localmente sobre los operadores de campo sobre la superficie nula y tenemos una situación de semi-inclusión modular siempre que $\gamma_1 \geq \gamma_2$. El álgebra de los generadores (5.5.10) coincide exactamente con la de los conmutadores en semi-inclusión modular (5.4.3).

Es interesante comentar sobre la sutileza y el significado físico del Teorema 2. Tenemos dos flujos unitarios que mueven las álgebras de regiones (como un todo) en álgebras de otras regiones de la misma forma, y queremos demostrar que los generadores de estos unitarios son iguales. En general esto no es correcto. Por ejemplo, podemos sumar a uno de los generadores un operador que implemente una simetría interna, como el operador de carga Q . Como Q conmuta con el tensor de energía-momento y no cambia la posición de los operadores, obtendremos que este nuevo generador moverá las álgebras de la misma forma. Sin embargo, el nuevo generador no será positivo si el original lo era, pues Q no es acotado por debajo.

Por último, queremos hacer notar que el infinito espacial del espacio de Minkowski es un punto ordinario en el cilindro, que puede ser considerado como la punta de un cono. Estas álgebras infinitas de traslaciones modulares dejarán la punta de ese cono fija. Sería interesante explorar la relación entre las simetrías asintóticas en infinito que han sido estudiadas en la literatura (ver por ejemplo [190] para una discusión reciente) con el número infinito de simetrías modulares de cada región con borde γ sobre el plano que estamos estudiando aquí.

5.6. Flujos modulares en el plano nulo. Derivación algebraica

En esta sección presentamos una prueba general de la acción local de los flujos modulares de regiones con borde sobre la superficie nula y de la propiedad Markoviana del vacío basándonos puramente en métodos algebraicos. Este enfoque es mucho más general y solo hemos podido desarrollarlo para CFTs, por cuestiones técnicas. Usaremos para ello el conocimiento de los flujos modulares geométricos del plano y la esfera para el vacío de una CFT.

Comenzaremos dando la siguiente definición. Si para un rango del parámetro modular s , el flujo modular de una región γ_1 (sobre el plano o el cono nulo) mueve al álgebra de otra región γ_2 (sobre el mismo plano o cono nulo) en el álgebra de otra región, en la forma

$$U_{\gamma_1}(-s)\gamma_2 U_{\gamma_1}(s) = e^{2\pi s}(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1, \quad (5.6.1)$$

diremos que el flujo modular de γ_1 mueve a γ_2 “geométricamente”, en ese rango del parámetro s . Como las regiones consideradas comparten todas el mismo plano o cono nulo, podemos especificar cada una por la forma de su borde γ sobre el plano o cono nulo. γ especifica el borde de la región indicando hasta dónde llega la coordenada nula: $x^+ = \gamma(x^\perp)$ en el caso del plano, y $r^+ = \gamma(x^\perp)$ en el caso del cono. De esta forma estas regiones se caracterizan por γ y es el sentido que debe asignársele a (5.6.1).

Nótese que cuando el flujo modular actúa geométricamente podemos calcular su acción sobre cada línea nula por separado. En particular, sabemos que si γ_1 es un plano o una parábola, su flujo modular moverá cualquier otra región γ_2 geométricamente para todo $s \in \mathbb{R}$, pues el flujo modular de estas regiones es local en una CFT.

Supongamos que γ_1 mueve geométricamente otra región γ_2 por encima de γ_1 ($\gamma_2 > \gamma_1$) para todo $s \geq 0$. En tal caso γ_1 y γ_2 están en una situación de semi-inclusión modular. Podemos etiquetar los elementos de la familia de γ_2 generada con el flujo modular de γ_1 (para todo valor del parámetro modular) con el parámetro τ de la

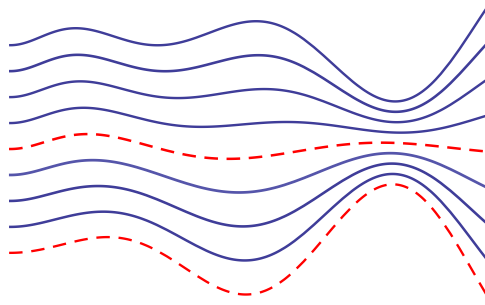


Figura 5.5: Plano nulo. Familia de curvas que se mueven entre si por la traslación modular asociada a las dos curvas discontinuas.

traslación modular correspondiente al par (γ_1, γ_2) .

$$\gamma_\tau = T_{\gamma_1, \gamma_2}(-\tau)\gamma_1 T_{\gamma_1, \gamma_2}(\tau); \quad (5.6.2)$$

Dada esta elección, tenemos que (ver Figura 5.5)

$$\gamma_\tau = \gamma_1 + 2\pi\tau(\gamma_2 - \gamma_1). \quad (5.6.3)$$

Aquí $\gamma_{\tau=0} = \gamma_1$ y $\gamma_{\tau=(2\pi)^{-1}} = \gamma_2$, y la familia incluye todas las γ_τ para $\tau \in (0, \infty)$. Tendremos una situación de semi-inclusión modular entre cualesquiera $\gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau_2}$ con $\tau_1 \leq \tau_2$, y la traslación modular asociada a cualquier par de curvas de esta familia moverá cualquier otro elemento de la familia de la forma “geométrica”:

$$T_{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}}(-\tau) \gamma T_{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}}(\tau) = \gamma + 2\pi\tau(\gamma_{\tau_2} - \gamma_{\tau_1}). \quad (5.6.4)$$

Notemos que el parámetro modular s y el parámetro de traslación modular τ en transformaciones de este tipo geométricas están restringidos por el requisito de que ningún elemento de la familia puede estar por debajo de la γ_1 original. Los elementos se extienden desde γ_1 hasta infinito, pasando por γ_2 , ver Figura 5.5. Si γ_1 mueve a γ_2 y γ_3 de forma geométrica, moverá su intersección y unión de forma geométrica. Esto se justifica por el hecho de que los flujos modulares son transformaciones unitarias que preservan las relaciones de conmutación, y estamos asumiendo que para álgebras de operadores localizados en una región, la región complementaria corresponde al álgebra conmutante (dualidad de Haag), el álgebra de la intersección de las regiones corresponde a la intersección de las álgebras, y el álgebra asociada a la unión de las regiones corresponde al álgebra generada por la unión de las álgebras.

De la misma forma, si (γ_1, γ_2) es un par ordenado de álgebras en situación de semi-inclusión modular, y sus flujos y traslaciones modulares mueven a otras dos regiones γ_3, γ_4 geométricamente, la intersección y unión de estas últimas serán movidas geométricamente por la traslación modular de (γ_1, γ_2) .

Tomemos una γ que tenga un plano por debajo. Sabemos que el flujo modular de γ mueve geoméricamente los trasladados modulares de cualquier plano por debajo de γ a alguna superficie por encima de γ . Tomando un número arbitrario de planos por debajo de γ podemos trasladar estos por encima de γ y tomar intersecciones y uniones de esas superficies, y todas las que así resulten serán movidas geoméricamente por el flujo modular de γ . Esto nos da una familia grande de regiones por encima de γ que sabemos serán movidas geoméricamente por γ . Sin embargo, hay algunas limitaciones de convexidad que evitan que podamos obtener cualquier superficie a través de este procedimiento. Para poder alcanzar un resultado general, o sea, poder obtener cualquier superficie con uniones de las traslaciones de superficies que garanticen un flujo modular geométrico sobre γ , nos restringiremos al caso de las CFTs para usar la invariancia conforme y con ello una familia más grande de regiones de la cuales sabemos que tienen un flujo modular geométrico, además de los planos: las parábolas. El nuevo ingrediente que ganamos con esta restricción es que sabemos que el vacío de una CFT restringido a una región cuyo borde sobre el plano nulo es una parábola, tiene un Hamiltoniano modular local, y por ello, geométrico, en el sentido de la definición de arriba.

Tomemos una γ y cualquier región parabólica por debajo de γ . Podemos usar la traslación modular asociada a este par para pasar la parábola por encima de γ , y de esta forma obtener una familia de superficies que serán movidas geoméricamente por el flujo modular de γ . Estas parábolas pueden estar tan estrechamente alineadas con el rayo nulo que le sirve de eje de simetría como queramos. Para valores de la traslación modular grandes, la superficie que resulta de trasladar la parábola por encima de γ se asemejará a una parábola muy cerrada y alineada con un rayo nulo (ver Figura 5.6). Podemos tomar cualquier número de las trasladadas de estas parábolas (tan cerradas como querramos) y tomar su unión para acercarnos a cualquier región arbitraria. El detalle técnico para considerar CFTs es este, que con la unión de parábolas (paraboloides) puedo aproximarme tanto como quiera a cualquier superficie. Concluimos de aquí que, al menos para el vacío de una CFT, el flujo modular de cualquier γ mueve geoméricamente cualquier superficie por encima de ella.

De este hecho podemos probar la identidad Markoviana para los Hamiltonianos modulares aún sin conocer su forma explícita. Para ello, tomemos dos regiones γ_1 y γ_2 que se intersectan. γ_1 va a mover a $\gamma_1 \cap \gamma_2$, que está por encima de γ_1 , geoméricamente, y $\gamma_1 \cup \gamma_2$ moverá a γ_2 , que está por encima de $\gamma_1 \cup \gamma_2$, geoméricamente. Ambos pares de álgebras están en situación de semi-inclusión modular, por lo que los generadores de las traslaciones modulares correspondientes son operadores positivos. Además, las traslaciones modulares relativas a los pares $(\gamma_1, \gamma_1 \cap \gamma_2)$ y $(\gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma_2)$, mueven cualquier otra γ_3 por encima de $\gamma_1 \cap \gamma_2$ geoméricamente, ecuación (5.6.4). De hecho, ambas

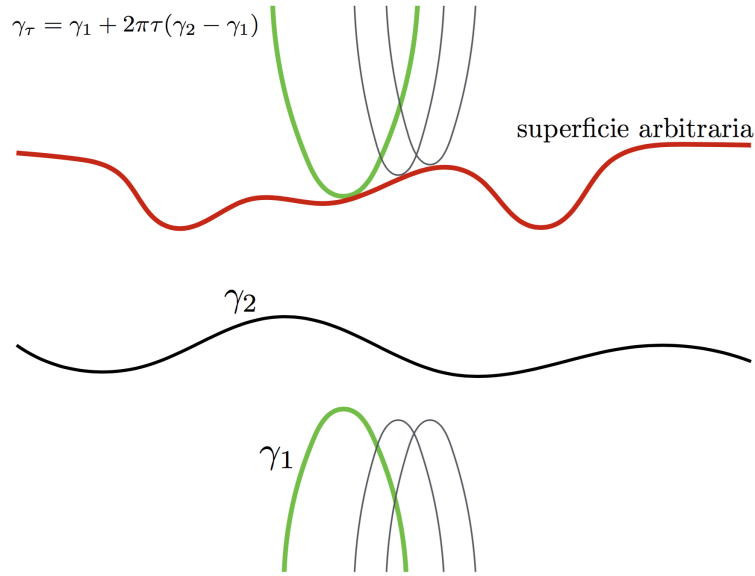


Figura 5.6: Plano nulo. Parábola γ_1 , curva γ_2 , y elemento γ_τ de la familia, trasladado de γ_1 por la traslación modular $T_{\gamma_1, \gamma_2}(\tau)$. Todas las álgebras y regiones γ_τ son movidas geoméricamente por γ_2 , así como sus uniones e intersecciones. De esta forma, trasladando parábolas pueden aproximarse cualquier curva arbitraria, y se concluye que γ_2 , arbitraria, mueve cualquier otra curva, arbitraria, geoméricamente, para el vacío de una CFT.

traslaciones modulares mueven a γ_3 de la misma forma:

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1, \gamma_1 \cap \gamma_2}(-\tau) \gamma_3 T_{\gamma_1, \gamma_1 \cap \gamma_2}(\tau) &= \gamma_3 + 2\pi\tau(\gamma_1 \cap \gamma_2 - \gamma_1) \\ &= \gamma_3 + 2\pi\tau(\gamma_2 - \gamma_1 \cup \gamma_2) = T_{\gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma_2}(-\tau) \gamma_3 T_{\gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma_2}(\tau). \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

En la igualdad intermedia hemos usado el hecho geométrico de que, vistas las γ 's como alturas en el eje x^+ , se cumple que $\gamma_1 \cap \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Como ambas traslaciones modulares tienen generador positivo, podemos aplicar el Teorema 2 de la Sección 5.4 para concluir que sus generadores son iguales.

$$G_{\gamma_1, \gamma_1 \cap \gamma_2} = G_{\gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma_2}. \quad (5.6.6)$$

De hecho, esta igualdad escrita en términos de los Hamiltonianos modulares queda

$$\hat{H}_{\gamma_1} - \hat{H}_{\gamma_1 \cap \gamma_2} = \hat{H}_{\gamma_1 \cup \gamma_2} - \hat{H}_{\gamma_2}. \quad (5.6.7)$$

Esta expresión no es exactamente la identidad de Markov que queríamos probar. Tenemos que probar que

$$\hat{H}_A + \hat{H}_B - \hat{H}_{A \cap B} - \hat{H}_{A \cup B} = 0 \Rightarrow S(A) + S(B) - S(A \cap B) - S(A \cup B). \quad (5.6.8)$$

Al intentar probar esto con una regularización que nos lleve dimensión finita, nos encontramos con el obstáculo de que queremos al mismo tiempo, un estado puro, y la igualdad izquierda. Como consecuencia de la descomposición de Schmidt, el número n_X de autovalores cero de una matriz densidad en una región o subálgebra X y la de su complemento satisfacen

$$n_X - n_{\bar{X}} = d_X - d_{\bar{X}}, \quad (5.6.9)$$

donde d_X es la dimensión del espacio de Hilbert \mathcal{H}_X . Podemos hacer n_X y $n_{\bar{X}}$ iguales a cero cuando las dimensiones son iguales, pero para nuestras regiones A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ y sus complementos, no podemos hacer cero el número de autovalores cero n_X de todas estas matrices densidad al mismo tiempo. Si una matriz densidad tiene un cero, su logaritmo y su Hamiltoniano modular son infinitos, mientras que esto no es un problema para la entropía. Una forma de evitar este problema técnico en dimensión finita es imponer un cutoff a la pureza del estado global. Antes de continuar, cambiemos los nombres de las regiones. Llamamos $A = (12)$, $B = (23)$, $A \cap B = (2)$, $A \cup B = (123)$, y $\bar{A} = (34)$, $\bar{B} = (14)$, $\overline{A \cap B} = (134)$, $\overline{A \cup B} = (4)$. Si nuestro estado global inicial puro es $\rho_{1234} = |0\rangle\langle 0|$, tomaremos en su lugar a

$$\tilde{\rho}_{1234} = (1 + \epsilon)^{-1} \left(|0\rangle\langle 0| + \epsilon \frac{1}{d_{1234}} \right), \quad (5.6.10)$$

con ϵ un cutoff pequeño. Aplicamos el miembro izquierdo de (5.6.8) a $\tilde{\rho}_{1234}$ en lugar de a ρ_{1234} . Esta modificación del estado global tiene la ventaja de que las reducciones tienen la forma simple

$$\tilde{\rho}_X = (1 + \epsilon)^{-1} \left(\rho_X + \epsilon \frac{1}{d_X} \right), \quad (5.6.11)$$

y por supuesto, todas las entropías se igualan a la de ρ_X para ϵ pequeño,

$$\tilde{S}(X) \sim S(X) - \epsilon \log(\epsilon) \frac{n_X}{d_X} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.6.12)$$

El miembro izquierdo de (5.6.8) implica, para el estado modificado, que

$$-\log \tilde{\rho}_{12} - \log \tilde{\rho}_{23} + \log \tilde{\rho}_2 + \log \tilde{\rho}_{123} = k_{13} = -\log \tilde{\rho}_{34} - \log \tilde{\rho}_{14} + \log \tilde{\rho}_{134} + \log \tilde{\rho}_4. \quad (5.6.13)$$

Ahora k_{13} puede ser un operador, en lugar de una constante como en (5.1.4). De la forma de ambos lados de esta ecuación no es difícil ver que k_{13} conmuta con todos los operadores en (2) y (4). Notemos también que (5.6.13) es invariante ante los intercambios $(1) \leftrightarrow (3)$ y $(2) \leftrightarrow (4)$.

Tomando valor de espectación en el estado global, tenemos, de la SSA

$$\langle k_{13} \rangle \geq 0. \quad (5.6.14)$$

Tenemos también, siguiendo los cálculos que condujeron a (5.1.7),

$$\mathrm{tr} \exp(\log \tilde{\rho}_2 + \log \tilde{\rho}_{123} - \log \tilde{\rho}_{12}) = \mathrm{tr} e^{\log \tilde{\rho}_{23} + k_{13}} \leq 1. \quad (5.6.15)$$

Usamos ahora la representación [58]

$$\mathrm{tr} e^{\log \rho + Q} = e^{\max_{\rho'} (\mathrm{tr}(Q\rho') - S(\rho' || \rho))}, \quad (5.6.16)$$

donde el máximo es sobre todas las matrices densidad ρ' . Tomando $Q = k_{13}$, $\rho = (1/d_1) \otimes \tilde{\rho}_{23}$ y $\rho' = \tilde{\rho}_{123}$ en (5.6.16) obtenemos

$$e^{\langle k_{13} \rangle} e^{\tilde{S}_{23} - \tilde{S}_{123}} = e^{\langle k_{13} \rangle} e^{S_{23} - S_{123} + \mathcal{O}(\epsilon \log \epsilon)} \leq \mathrm{tr} e^{\log \tilde{\rho}_{23} + k_{13}} \leq 1. \quad (5.6.17)$$

Intercambiando $2 \leftrightarrow 4$, y teniendo en cuenta que $S_{34} = S_{12}$ y $S_{143} = S_2$ tenemos

$$e^{\langle k_{13} \rangle} e^{S_{12} - S_2 + \mathcal{O}(\epsilon \log \epsilon)} \leq 1. \quad (5.6.18)$$

Multiplicando (5.6.17) y (5.6.18) se obtiene

$$e^{2 \langle k_{13} \rangle} e^{S_{12} + S_{23} - S_2 - S_{123} + \mathcal{O}(\epsilon \log \epsilon)} \leq 1. \quad (5.6.19)$$

De la SSA $\langle k_{13} \rangle \leq \mathcal{O}(\epsilon \log(\epsilon))$, con lo cual

$$\langle k_{13} \rangle = \mathcal{O}(\epsilon \log(\epsilon)). \quad (5.6.20)$$

Usando (5.6.19), obtenemos finalmente

$$S_{12} + S_{23} - S_2 - S_{123} = \mathcal{O}(\epsilon \log(\epsilon)), \quad (5.6.21)$$

y el estado es Markoviano cuando quitamos el cutoff.

Algo muy interesante a notar, y que surge cuando miramos atrás a las ecuaciones (5.6.17) y (5.6.18), con el conocimiento de que vale (5.6.20) y la SSA, es que todas las entropías involucradas S_{12} , S_{23} , S_{123} , S_2 , son iguales, salvo errores de orden $\epsilon \log \epsilon$. Esta regularización apunta entonces a un resultado más fuerte que Markov. Interpretamos esto como que debe existir una regularización en el continuo para la cual todas las entropías de estas regiones son iguales. Esta conclusión, que puede ser a primera vista extraña, es de hecho correcta para las regiones con borde sobre el plano nulo, y es el contenido de la próxima sección.

5.7. La propiedad Markoviana para las entropías de Rényi

En esta sección demostraremos un resultado mucho más fuerte que Markov: Todas las entropías de von Neumann S y de Rényi S_n de orden n , del vacío de una QFT, son iguales para todas las regiones con borde arbitrario sobre el plano nulo y para un cutoff invariante de Lorentz. Como nuestro análisis vale para cualquier QFT, en el caso de las CFT obtendremos la propiedad de Markov como una consecuencia de esto, aunque en tal caso el mapeo del plano al cono no deja el cutoff invariante y las entropías cambian. La propiedad de que el vacío es Rényi-Markoviano, indica que la estructura de entrelazado del vacío es mucho más limitada y específica. Veremos que estas propiedades se siguen de consideraciones muy generales y simples sobre la geometría del plano nulo. De hecho, nuestros argumentos incluyen no solo a las entropías de Rényi, sino a cualquier otra funcional local y extensiva de la superficie de entrelazado, como la energía libre con la inserción de un operador de superficie localizado en la superficie de entrelazado.

Consideremos el plano nulo $x^- = 0$ con coordenadas ortogonales x^+ y $y^a = (x^2, \dots, x^{d-1}) = x^\perp \in \mathbb{R}^{d-2}$. La métrica inducida sobre el plano nulo (en la signatura $(-, +, \dots, +)$) es

$$ds^2 = (dy^a)^2 + 0 dx^+ dx^- . \quad (5.7.1)$$

Tomamos una superficie $d - 2$ dimensional $x^+ = \gamma(y)$ sobre el plano nulo, y que cruce todos los rayos nulos, como en la Figura 5.1. Queremos determinar todas las entropías de Rényi S_n del vacío de una QFT para las regiones $\gamma(y)$ que hemos estado considerando. Como la entropía no depende la superficie de Cauchy sino de toda el álgebra de operadores en el completamiento causal, podemos decir que la entropía es una funcional de la superficie de entrelazado $\gamma(y)$. Calculamos todas las entropías con un cutoff ϵ invariante de Lorentz. En el Apéndice C se discute en detalle una regularización invariante de Lorentz de la entropía de entrelazado, aplicable a cualquier QFT en d dimensiones. En una teoría con escalas m , S_n puede también depender de m . El vacío es invariante de Lorentz, por lo que esta funcional solo va a depender de las cantidades geométricas adimensionales que se puedan construir a partir de γ , ϵ y m . Si estuviésemos lidiando con otros estados que no son el vacío, ciertamente habrían ingredientes adicionales que conformarían a esta funcional, por ejemplo, el estado térmico no es invariante de Lorentz, por lo que tiene un vector asociado que apunta en la dirección temporal. Con este vector podría hacer contracciones con las derivadas de γ . El vacío no tiene ningún vector ni cantidad geométrica asociada. La

funcional S_n puede expandirse en términos de la forma

$$S_n(\gamma) = \int d^{d-2}\sigma_{y_1} \dots \int d^{d-2}\sigma_{y_n} f(\gamma(y_1), \dots, \gamma(y_n); \nabla\gamma(y_1), \dots), \quad (5.7.2)$$

donde $d\sigma$ es el elemento de volumen a lo largo de γ y f es una función de las distancias entre los puntos y los parámetros dimensionales ϵ y m .

El argumento más simple es así. Estas funcionales S_n son invariantes de Lorentz. En particular, un boost reescala la coordenada $x^+ \rightarrow \lambda x^+$, de forma que tenemos que

$$S_n(\gamma) = S_n(\lambda\gamma), \quad (5.7.3)$$

para cualquier $\lambda > 0$. Tomando el límite $\lambda \rightarrow 0$, la entropía de γ debe ser la misma que la de la superficie arbitrariamente cerca de la cuña de Rindler $x^+ = 0$. Estamos asumiendo que no hay funcionales patológicas invariantes de Lorentz que distingan en este límite a las dos superficies, como aquellas que cuentan el número de máximos de la curva γ . Esperamos que estas funcionales regularizadas con ϵ sean continuas como funciones de la forma de γ . Con esto, S_n es independiente de γ .

Otra forma de obtener esto es ver que en la métrica degenerada del plano nulo (5.7.1), tenemos un conjunto infinito de isometrías

$$\begin{aligned} y &= y', \\ x^+ &= h(y', x^{+'}). \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

O sea, podemos deformar la coordenada x^+ de una forma dependiente de y , y obtener la misma métrica. Estas no son isometrías del espacio de Minkowski. Cualquier γ puede ser deformada en cualquier otra con estas isometrías, por lo que tienen la misma métrica inducida intrínseca (plana). Estas isometrías implican que la funcional (5.7.2) será la misma para cualquier γ . Nada cambia si consideramos usar las derivadas de γ de cualquier orden. Gradientes múltiples de γ son tensores que pueden expandirse en los vectores ortogonales $k = (1, 1, 0, \dots, 0)$ y \hat{y}^a , y lo mismo para los vectores de distancia entre los puntos de γ . Una vez que estos tensores se contraen, las componentes proporcionales a k no contribuyen porque $k^2 = 0$ y $k \cdot \hat{y}^a = 0$. Las contribuciones restantes son las mismas que las de una γ plana, y por ello independientes de la forma de γ .

Tampoco podemos distinguir las γ 's con la curvatura extrínseca. Hay dos vectores nulos normales a γ , $k = (1, 1, 0, \dots, 0)$ y q , $q^2 = 0$, normalizados tal que $k \cdot q = 1$. Como k es constante a lo largo de γ , su correspondiente curvatura extrínseca se anula. Existe la ambigüedad $k \rightarrow \lambda k$, $q \rightarrow 1/\lambda q$ en la representación de la superficie en términos de sus vectores ortogonales nulos, por lo que, para tener un invariante tenemos que tener

producto de las curvaturas extrínseca de q y k , que son también cero.

Concluimos que todas las funcionales que podemos construir deben dar el mismo valor S_n para cualquier γ . La propiedad de Markov para S_n se sigue trivialmente en la combinación

$$S_n(A) + S_n(B) - S_n(A \cap B) - S_n(A \cup B) = 0, \quad (5.7.5)$$

porque todas las entropías son iguales.

Este resultado de la independencia de S_n en γ no asume que exista ninguna transformación unitaria del vacío correspondiente a las deformaciones (5.7.4) del plano nulo. Sin embargo, tales transformaciones unitarias que dejan invariante el vacío y deforman las regiones con borde sobre el plano nulo, de hecho existen para el caso de $x^+ = x^{+'} + \gamma'(y')$. Estas vienen dadas por la traslación modular correspondiente al par de regiones de interés (aquellas que se transforma una en otra) como vimos en las secciones anteriores. Los unitarios que implementarían las otras transformaciones más generales $x^+ = h(y', x^{+'})$ no dejan invariante al vacío, que es enviado a un estado de energía infinita (aunque en principio, sí preservan S_n).

Estos argumentos geométricos implican que la independencia de las entropías con γ se extiende a otras cantidades, como a funciones de partición con la inserción de operadores localizados en una superficie de dimensión $d - 2$ sobre el plano nulo, pero no se aplica a inserciones de operadores localizados en una superficie de dimensión menor, que no son equivalentes ante las isometrías del plano nulo.

Los argumentos de arriba requieren un cutoff invariante de Lorentz. Una vez que esto no es satisfecho, la igualdad de todas las entropías para γ 's distintas no vale más. En tal caso podríamos cambiar el cutoff para γ y γ' de forma independiente. Sin embargo, la propiedad Markoviana es una propiedad independiente de la regularización. La razón es que las divergencias en las entropías son locales y extensivas sobre el borde de la región, por lo que las divergencias con cualquier regularización deben cancelarse localmente en la combinación (5.7.5).

Cualquier funcional geométrica invariante de Lorentz de una superficie $d - 2$ dimensional con condiciones mínimas de continuidad debe ser constante para regiones sobre el plano nulo. Si la funcional es finita, o tiene divergencias locales y extensivas a lo largo de γ , tiene que ser markoviana en el plano nulo, y este es un enunciado independiente del cutoff. Esta propiedad persiste entonces sobre el cono nulo para las funcionales invariantes conformes. Ilustramos esto con el modelo de la información mutua extensiva, y en el Capítulo siguiente, mediante el cálculo de la forma explícita de todas las S_n sobre el cono nulo.

5.7.1. Ejemplo: modelo de la información mutua extensiva

Como un ejemplo simple de las consideraciones anteriores veamos el modelo de la información mutua extensiva (IME) para la EE [191]. Para una superficie espacial A con complemento \bar{A} en una superficie de Cauchy dada, este modelo tiene la funcional

$$S(A) = \int_A d\sigma_x \int_{\bar{A}} d\sigma_y \eta_x^\mu \eta_y^\nu (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial^2) |x - y|^{-(2d-4)}, \quad (5.7.6)$$

donde η es el vector ortonormal a la superficie de Cauchy. Un cutoff en distancia está implícitamente pensado entre A y \bar{A} . El interés de esta expresión es que nos da un ejemplo simple de funcional invariante conforme, positiva y que cumple SSA. Puede también pensarse como la energía libre en presencia de operadores en el borde de la región que son exponenciales de campos libres [192].

El integrando es una corriente conservada en ambos índices, lo que garantiza que que S sea independiente de la superficie de Cauchy. Esta expresión es equivalente a una que solo involucra el borde de la región A

$$S(A) = \int_{\partial A} d\sigma_x^{\alpha\beta} \int_{\partial A} d\sigma_y^{\alpha\beta} \frac{1}{|x - y|^{2(d-2)}}, \quad (5.7.7)$$

donde, otra vez, asumimos un cutoff en los puntos coincidentes. Con un cutoff de distancia en (5.7.7), podemos verificar, con los argumentos de arriba, que S es independiente de la región sobre el plano nulo. La Markovianidad sobre el cono puede verse de (5.7.6), eligiendo el mismo cono nulo como la superficie de Cauchy. La combinación Markoviana reduce esta integral a la integral doble finita de (5.7.6) sobre las regiones disjuntas $A \cap \bar{B}$ y $B \cap \bar{A}$ del cono nulo. Se comprueba explícitamente que esta integral doble sobre parches disjuntos del cono nulo se anula idénticamente, obteniéndose la propiedad Markoviana para esta funcional.

5.8. Comentarios finales sobre la propiedad Markoviana

Hemos visto que los Hamiltonianos modulares de regiones con borde arbitrario sobre un plano nulo en el espacio de Minkowski pueden escribirse de forma explícita y local como una integral del tensor de energía-momentos sobre la superficie nula. Este resultado es de la forma Rindler rayo a rayo nulo, y no hay términos cruzados entre los rayos nulos. Probamos esto analizando el límite nulo en el OPE de los operadores de twist de una franja, y de forma alternativa, mediante consideraciones algebraicas sobre las propiedades de los flujos modulares (semi-inclusión modular). Estos Hamiltonianos modulares no pueden expresarse de forma local sobre una superficie de Cauchy que no

es la nula (no son una carga conservada de una corriente local). Para CFTs tenemos un resultado análogo para regiones con borde sobre el cono nulo.

Los flujos modulares de estas regiones mueven las subálgebras de regiones con futuro sobre el mismo plano o cono nulo de forma geométrica, y a una velocidad dada por las velocidades de Rindler rayo a rayo nulo. Los operadores de campos fuera de la superficie nula serán movidos por estos flujos modulares a operadores no locales en general. Estos Hamiltonianos modulares forman un álgebra de Lie infinito dimensional.

Estos resultados demuestran la propiedad Markoviana del vacío respecto de esta familia de regiones. Una propiedad interesante que se deriva de esto es que el vacío puede ser reconstruido en la unión $\gamma_1 \cup \gamma_2$ de las dos regiones a partir del conocimiento de su reducción a las regiones por separado, usando (2.1.40) o (2.1.41), con lo cual, la estructura de entrelazado del vacío de una QFT es más simple de lo que uno espera. Si llamamos $\gamma_1 = A \otimes B$, $\gamma_2 = B \otimes C$, la estructura de entrelazado de un estado Markoviano es [71]

$$\rho_{ABC} = \sum_k p_k \rho_{AL}^k \otimes \rho_{RC}^k, \quad (5.8.1)$$

con $\sum_k p_k = 1$, ρ_{AL}^k es el reducido de ρ_{ABC} al subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_L^k$ y ρ_{RC}^k es el reducido de ρ_{ABC} al subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_R^k \otimes \mathcal{H}_C$, para alguna descomposición ortogonal $\mathcal{H}_B = \oplus_k \mathcal{H}_L^k \otimes \mathcal{H}_R^k$ del espacio de Hilbert de la intersección. Si sustituimos la forma (5.8.1) en las infinitas relaciones de Markovianidad para la entropía de Rényi

$$S_n(AB) + S_n(BC) - S_n(ABC) - S_n(B) = 0, \quad (5.8.2)$$

se obtiene que el estado ρ_{ABC} es necesariamente de la forma producto

$$\rho_{ABC} = \rho_{AL} \otimes \rho_{RC}, \quad (5.8.3)$$

donde ρ_{AL} y ρ_{RC} son los reducidos de ρ_{ABC} a los respectivos espacios $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_L$ y $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_C$, para alguna descomposición en factores del espacio de Hilbert de la intersección $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R$. Esta es una condición muy fuerte sobre la estructura de entrelazado del vacío. El vacío es casi un estado producto en la dirección perpendicular del plano nulo, dado que la factorización está “localizada” en la intersección, y esta puede hacerse tan pequeña como se quiera. Uno estaría tentado a concluir de aquí que el vacío es un estado producto en la dirección ortogonal. Esto no es matemáticamente correcto, dado que las álgebras de operadores no se pueden localizar en la superficie nula en dimensión $d > 2$ en teorías con un punto fijo UV interactuante. En los casos en que sí se puede hacer, como en $d = 2$, o puntos fijos UV libres, se puede comprobar que de hecho el vacío tiene la forma de un estado producto

$$\rho_{ABC} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C, \quad (5.8.4)$$

en lugar de la forma general de un estado Markoviano (5.8.1), o de un Rényi-Markoviano (5.8.3). Esto implica que en estos casos, la información mutua entre A y C , que son conjuntos disjuntos, es cero.

Capítulo 6

Todas las entropías sobre el cono nulo

En este Capítulo se determina la forma explícita de todas las entropías de entrelazado y de Rényi para el vacío reducido a regiones arbitrarias con frontera sobre el plano o el cono nulo. Se comprueba que todas estas entropías saturan la Subaditividad Fuerte (el vacío es Markoviano). Para el plano nulo el análisis es válido para toda Teoría de Campos y sobre el cono nulo los resultados solo valen para teorías conformes. La construcción de la expresión general de estas entropías está estrechamente relacionada con la acción efectiva de un campo dilatón en dos dimensiones menos. En particular, el término universal logarítmico en la entropía surge del término anómalo de Wess-Zumino de dicha acción. Se chequea la forma general de estas entropías en teorías con dual holográfico. Para esto se calculan las áreas mínimas en AdS de superficies con frontera arbitraria en un cono nulo que vive en la frontera de AdS. Holográficamente la propiedad Markoviana resulta de una isometría sobre el cono nulo en AdS, y esta propiedad se mantiene ante correcciones cuánticas y correcciones de cuerdas. El Capítulo se organiza así. En la Sección 6.1 se estudian las regiones con frontera sobre el cono nulo. Usando invariancia de Lorentz y la propiedad Markoviana se determina la forma universal explícita de todas las entropías como función del perfil del borde de la región, parametrizado por $\gamma(y)$. Esta viene dada por una funcional local que es una integral sobre las variables angulares sobre el cono. Esta integral se interpreta como una acción efectiva de un campo dilatón $\log \gamma(y)$ en $d - 2$ dimensiones¹. En la Sección 6.2 estudiamos estas cuestiones desde el punto de vista de AdS/CFT.

La EE de una región en la frontera de AdS viene dada por el área de una superficie de área mínima (en general extrema) del bulk, según la prescripción de Ryu-Takayanagi que se discutió en el Capítulo 2. Se determinan dichas superficies con frontera sobre el plano o el cono nulo en el borde de AdS. Esta construcción geométrica tiene varias

¹La idea de conectar la EE con la acción de un dilatón en dos dimensiones menos ha sido discutida en la literatura anteriormente, ver por ejemplo [193].

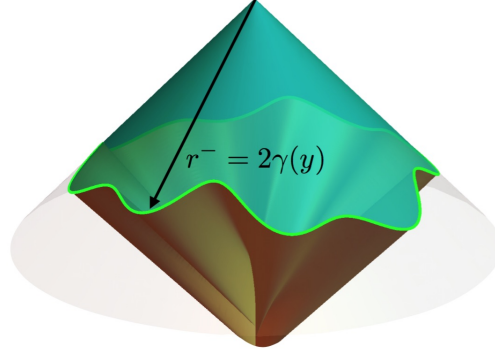


Figura 6.1: Región espacio-temporal en Minkowski con borde sobre el cono nulo.

características especiales: Las ecuaciones que determinan la superficie son lineales y el lugar geométrico de estas se localiza sobre un plano o un cono nulo en el bulk. Esto permite chequear la propiedad Markoviana holográficamente sin calcular explícitamente las entropías. Para el cono nulo evaluamos la entropía holográfica explícitamente y comprobamos que coincide con un caso particular de la fórmula que se obtiene en la Sección 6.1. Estos resultados se extienden para incluir correcciones cuánticas ($1/N$) y correcciones en el acoplamiento de 't Hooft (correcciones de cuerdas).

6.1. Forma universal de las entropías en el cono nulo para una CFT

A partir de esta sección determinaremos la forma universal de la entropía de entrelazado y de Rényi de la matriz densidad ρ_X del vacío de una CFT reducido a la región X con frontera arbitraria γ sobre el cono nulo, Figura 6.1. Como discutimos en el Capítulo 5, las entropías de estas regiones saturan la SSA, o dicho en otras palabras, el vacío de una CFT es Markoviano respecto de estas regiones.

Consideraremos una curva

$$r^- = 2\gamma(y) \quad (6.1.1)$$

en el pasado en el cono nulo $r^+ = 0$, con

$$r^\pm = r \pm x^0. \quad (6.1.2)$$

Esta curva parametriza el borde de una superficie de Cauchy. La restricción de la métrica de Minkowski a $r^+ = 0, r^- = 2\gamma(y)$ nos da una esfera $(d-2)$ -dimensional de radio variable con la posición angular:

$$ds^2 = 0 dr^+ dr^- + \gamma(y)^2 g_{ab}(y) dy^\alpha dy^\beta. \quad (6.1.3)$$

Aquí

$$g_{ab}(y)dy^a dy^b = \frac{4}{(1+y^2)^2} (dy^a)^2 \quad (6.1.4)$$

describe una esfera de radio uno S^{d-2} en coordenadas conformemente planas².

Salvo una constante aditiva, la entropía debe ser local y extensiva. La entropía de entrelazado y de Rényi deben ser por lo tanto una funcional local de γ/ϵ , sus derivadas y las cantidades geométricas costruídas con la métrica inducida g_{ab} (más adelante comentaremos sobre una posible dependencia con las cantidades geométricas extrínsecas)

$$S_n = \int d^{d-2}y \sqrt{g} L_n(\gamma/\epsilon, g_{ab}, \partial \dots) + F_n. \quad (6.1.5)$$

La propiedad Markoviana sobre el plano nulo es independiente de la regularización y por lo tanto se preserva ante transformaciones conformes en una CFT. La propiedad Markoviana implica que la entropía sobre el cono nulo es una funcional local con un posible término aditivo F_n independiente de γ .

Determinaremos la forma general de L_n que es permitida por la invariancia de Lorentz. Encontraremos que esta forma está estrechamente relacionada con la acción efectiva de un dilatón sobre S^{d-2} . Nuestro análisis revelará como la EE para esferas

$$S(\gamma) = \alpha_{d-2} \frac{\gamma^{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + \alpha_{d-4} \frac{\gamma^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} + \dots + \begin{cases} (-)^{\frac{d}{2}-1} 4 A \log(\gamma/\epsilon) & d \text{ par} . \\ (-)^{\frac{d-1}{2}} F & d \text{ impar} . \end{cases} \quad (6.1.6)$$

se generaliza a una frontera arbitraria $\gamma(y)$ sobre el cono nulo. El resultado principal de este Capítulo son las expresiones (6.1.18) y (6.1.27).

6.1.1. Transformaciones de Lorentz vistas desde el cono nulo

Para imponer las restricciones que la invariancia de Lorentz hace sobre (6.1.5) necesitamos determinar cómo estas actúan en el subespacio $r^+ = 0$, $r^- = 2\gamma(y)$. El pull-back de la métrica de Minkowski es (6.1.3), que describe una esfera S^{d-2} de radio variable $\gamma(y)$. Es conocido que las transformaciones de Lorentz se reducen a transformaciones conformes sobre S^{d-2} ; lo cual es claro en el formalismo de embedding, donde las transformaciones conformes son representadas como transformaciones lineales sobre un subespacio proyectivo de un cono nulo en un espacio dos dimensiones más. Revisaremos a continuación este formalismo; véase por ejemplo [183, 194, 195].

Es útil parametrizar el cono nulo \mathcal{C} por

$$x^\mu(\lambda, y^a) = \lambda \omega(y) \hat{x}^\mu(y), \quad \hat{x}^\mu(y) = \left(\frac{1+y^2}{2}, y^a, \frac{1-y^2}{2} \right), \quad (6.1.7)$$

²Para ver esto, úsese el cambio de variables $y^a = \tan(\theta/2) \hat{n}^a$, con \hat{n}^a vectores unitarios.

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $y^a \in \mathbb{R}^{d-2}$. Las coordenadas \hat{x}^μ dan la sección de Poincaré $\hat{x}^0 + \hat{x}^d = 1$ del cono nulo $\eta_{\mu\nu}\hat{x}^\mu\hat{x}^\nu = 0$; λ parametriza la dirección radial en el cono. El factor conforme $\omega(y)$ puede ser arbitrario, pero aquí lo fijaremos a

$$\omega(y) = \frac{2}{1+y^2}. \quad (6.1.8)$$

(que es una esfera sobre el cono). El pull-back de la métrica de Minkowski a esta sección de \mathcal{C} se escribe como

$$ds_{\mathcal{C}}^2 = \lambda^2 \frac{4}{(1+y^2)^2} (dy^a)^2, \quad (6.1.9)$$

que, recordando (6.1.4), describe una esfera en coordenadas conformemente planas. En particular, estamos interesados en una esfera de radio variable $\gamma(y)$, y esto se obtiene haciendo

$$\lambda = \gamma(y). \quad (6.1.10)$$

La principal ventaja de estas coordenadas es que existe una relación muy simple entre las transformaciones de Lorentz en x^μ y las transformaciones conformes en la sección (λ, y^a) del cono nulo. Los generadores del grupo de Lorentz $J_{\mu\nu}$ inducen sobre la sección de \mathcal{C} rotaciones (J_{ab}), traslaciones (T_a), dilataciones (D) y transformaciones conformes especiales (K_a). La relación entre los generadores en estas coordenadas es:

$$J_{ab}, T_a = J_{0,a} - J_{d-1,a}, K_a = J_{0,a} + J_{d-1,a}, D = J_{d-1,0}. \quad (6.1.11)$$

De esta forma, el grupo de Lorentz $SO(d-1,1)$ en d dimensiones da lugar al grupo conforme en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^{d-2} . Las coordenadas transforman como $(\lambda, y) \rightarrow (\lambda', y')$ con

$$\frac{\partial y'^a}{\partial y^c} \frac{\partial y'^b}{\partial y^d} \delta_{ab} = e^{2A(y)} \delta_{cd}, \quad \lambda' = e^{-A(y)} \lambda. \quad (6.1.12)$$

Nótese que mientras el espacio $\mathbb{R}^{d-1,1}$ usado en el formalismo de embedding para una CFT es solo un artificio, en nuestro caso este espacio es el espacio físico donde la teoría vive.

6.1.2. Entropías sobre el cono nulo

Nuestro objetivo es determinar la forma general de (6.1.5) consistente con la invariancia de Lorentz. Podemos pensar a S_n como la acción de una teoría Euclídea que vive en S^{d-2} , de un campo escalar $\gamma(y)$. Como se vió anteriormente, las transformaciones de Lorentz actúan como transformaciones conformes sobre S^{d-2} , así que mantendremos la métrica g_{ab} explícitamente para seguir bien la acción de los reescaleos conformes, que actúan como $g_{ab} \rightarrow e^{2A(y)} g_{ab}$. Además, de (6.1.12), $\phi(y) = \log(\gamma(y)/\epsilon)$ transforma aditivamente como un campo dilatón. De esta forma, el problema de encontrar las en-

tropías S_n es equivalente al de construir una acción local invariante conforme en $d - 2$ dimensiones para un campo dilatón $\phi(y) = \log(\gamma(y)/\epsilon)$.

Es muy interesante notar que el campo dilatón haya sido utilizado en la prueba del Teorema-A (y c) de [46]; véase también [118, 124, 196, 197]. Allí, y como se discutió en el Capítulo 3, el dilatón se introdujo para hacer coincidir las anomalías. En nuestro contexto de entropía de entrelazado, $\phi(y)$ viene dado por la forma del borde de la superficie de entrelazado sobre el cono nulo. Los resultados obtenidos en la literatura y producto de estos trabajos van a ser muy útiles para nuestro objetivo, especialmente el análisis en dimensión d de [198].³

d impar

Comencemos por el caso más simple de dimensión espacio-temporal d impar. La funcional tipo acción para la entropía $S_n(\gamma)$ puede construirse como una expansión en derivadas de invariantes geométricos contruídos de la métrica

$$\hat{g}_{ab} \equiv \frac{\gamma(y)^2}{\epsilon^2} g_{ab}(y), \quad (6.1.13)$$

con g_{ab} la métrica de la esfera unitaria S^{d-2} . Como esta es la métrica inducida por la métrica plana de Minkowski en γ queda claro que dichos términos geométricos son invariantes de Lorentz. Notemos que el tensor de Riemann puede ser escrito en función de \hat{R}_{ab} y \hat{R} pues \hat{g}_{ab} es conformemente plana y el tensor de Weyl se anula. Podemos además construir otros invariantes usando la curvatura extrínseca de γ . En el Apéndice E mostramos que sobre el cono nulo la curvatura extrínseca viene dada por la métrica y el tensor de Ricci inducidos. Por ello, la acción más general que se puede construir viene dada por los invariantes geométricos intrínsecos formados con potencias de \hat{g}_{ab} , el tensor de Ricci, y la derivada covariante de este. Los primeros términos tienen la forma

$$S_n(\gamma) = \int d^{d_\perp} y \sqrt{\hat{g}} \left(\beta_0 + \beta_2 \hat{R} + \beta_4 \hat{R}^2 + \beta'_4 (\hat{R}_{\alpha\beta})^2 + \dots \right) + F_n, \quad (6.1.14)$$

con $d_\perp \equiv d - 2$. Los coeficientes constantes β_j dependen de la teoría específica y de n . En esta expresión, la invariancia conforme del dilatón -invariancia de Lorentz en d -dimensiones- es manifiesta.

Para ganar intuición escribamos explícitamente los términos con cero y dos deriva-

³Métodos que involucran al dilatón han sido usados en el contexto de EE en [193, 199–201].

das:

$$\begin{aligned} \int d^{d_\perp} y \sqrt{\hat{g}} &= \int d^{d_\perp} y \sqrt{g} \frac{\gamma(y)^{d_\perp}}{\epsilon^{d_\perp}}, \\ \int d^{d_\perp} y \sqrt{\hat{g}} \hat{R} &= \int d^{d_\perp} y \sqrt{g} \frac{\gamma^{d_\perp-2}}{\epsilon^{d_\perp-2}} \left((d_\perp - 1)(d_\perp - 2) \left(\frac{\nabla \gamma}{\gamma} \right)^2 + d_\perp (d_\perp - 1) \right). \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

El primer término es el término de área. Haciendo la redefinición

$$\varphi(y) = 2 \sqrt{\frac{d_\perp - 1}{d_\perp - 2}} \left(\frac{\gamma(y)}{\epsilon} \right)^{(d_\perp-2)/2}, \quad (6.1.16)$$

el segundo término se convierte en (para $d \geq 5$) la acción de un campo escalar conformemente acoplado,

$$\int d^{d_\perp} y \sqrt{\hat{g}} \hat{R} = \int d^{d_\perp} y \sqrt{g} ((\nabla \varphi)^2 + \xi R \varphi^2), \quad (6.1.17)$$

donde $\xi = \frac{d_\perp - 2}{4(d_\perp - 1)}$ y el escalar de Ricci $R = d_\perp(d_\perp - 1)$ para la esfera de radio uno⁴. El término de área proporcional a γ^{d_\perp} es simplemente un potencial invariante conforme $V(\varphi) \sim \varphi^{2d_\perp/(d_\perp-2)}$. Los términos siguientes en esta acción efectiva igual a la EE son generalizaciones de este Laplaciano conforme a más derivadas. Volveremos sobre este punto más adelante.

La constante aditiva fija F_n es trivialmente consistente con la propiedad Markoviana (5.7.5). Sin embargo, no es posible escribirla como un invariante geométrico. En este sentido es análoga a las anomalías en dimensión d par, que discutiremos debajo. Para la EE sobre esferas este es el familiar término constante F que coincide con la parte constante de la energía libre de la teoría calculada sobre la esfera Euclídea.

Juntando estos resultados y reemplazando $d_\perp \rightarrow d - 2$, la forma universal de la entropía de entrelazado y de Rényi para regiones con borde sobre el cono nulo y en dimensión espacio-temporal impar es

$$\begin{aligned} S_n(\gamma) &= \int d^{d-2} y \sqrt{g} \left\{ \beta_0 \frac{\gamma(y)^{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + \beta_2 \frac{\gamma^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} \left((d-2)(d-3) + (d-3)(d-4) \left(\frac{\nabla \gamma}{\gamma} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\} + F_n. \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

Comparemos esta con la EE de una esfera en una CFT, Eq. (6.1.6). Reconocemos en (6.1.18) el término de área y todas las contribuciones subdominantes generalizadas al caso de $\gamma(y)$ no constante. Alguna de las β_k pueden fijarse comparando con la EE de la esfera. Por ejemplo, $\beta_0 = \alpha_{d-2}, \beta_2 = \alpha_{d-4}$. Esto significa que el coeficiente de

⁴Este término se anula en $d = 2, 3$ y es proporcional al volumen de S^{d-2} en $d = 4$.

$(\nabla \log \gamma)^2$ en el primer término subdominante $(\gamma/\epsilon)^{d-4}$ es únicamente determinado por el correspondiente en la EE de la esfera. Esto es una consecuencia de la invariancia de Lorentz. A órdenes superiores, más invariantes geométricos están permitidos, como los términos con β_4, β'_4 en (6.1.14). En este caso, los coeficientes de la esfera α_{d-2k} fijan solo una parte de los β_i , y la entropía para la región $\gamma(y)$ contiene más información sobre la teoría dada. El término de orden γ^{d-2-2k} es esencialmente una versión en $2k$ derivadas del Laplaciano conforme sobre la esfera. Más adelante daremos una expresión compacta para estos operadores.

d par

Para d par esta no es toda la historia. Deben de haber contribuciones adicionales que vengan de la anomalía A de Euler. De hecho, para una esfera de radio constante deberíamos recuperar la contribución logarítmica universal

$$S_{\text{anom}} = (-1)^{d/2-1} 4A \log \frac{\gamma}{\epsilon}. \quad (6.1.19)$$

Queremos encontrar una funcional local invariante de Lorentz que se reduzca a (6.1.19) para $\gamma(y)$ constante. A primera vista esto parece todo un reto, pues como vimos en (6.1.14), no hay invariantes geométricos contruídos con \hat{g}_{ab} que den lugar a dicho término.

Proponemos que la generalización de (6.1.19) a $\gamma(y)$ arbitrarias en un término de Wess-Zumino para la anomalía de Weyl en S^{d-2} . Veamos el caso más simple de la anomalía de Weyl para una CFT en $d = 2$. El tensor de energía momentos en una variedad con métrica g_{ab} tiene una anomalía de traza

$$\langle T_a^a \rangle = \frac{c}{24\pi} R, \quad (6.1.20)$$

con R el escalar de curvatura de g_{ab} . Esto implica que, ante un reescalado de Weyl $\delta g_{ab} = 2\delta\sigma g_{ab}$, la acción efectiva $W = -\log Z$ cambia como

$$\frac{\delta W}{\delta\sigma} = -\frac{c}{24\pi} R. \quad (6.1.21)$$

Una funcional local cuya variación de (6.1.21) puede ser obtenida introduciendo un campo dilatón τ que transforme como $\tau \rightarrow \tau + \sigma(y)$ ante $g_{ab} \rightarrow e^{2\sigma(y)} g_{ab}$. El resultado es el término de Wess-Zumino [202]

$$S_{\text{WZ}} = \frac{c}{24\pi} \int d^2y \sqrt{g} (\tau R - (\nabla\tau)^2). \quad (6.1.22)$$

La derivada del dilatón cancela la transformación de Weyl del escalar de Ricci, $R[e^{2\sigma}g] =$

$e^{-2\sigma}(R[g] - 2\nabla^2\sigma)$. Notemos que, mientras que esta es una acción local en g_{ab} y τ , no es una acción local construida con la métrica invariante de Weyl $\hat{g}_{ab} = e^{-2\tau}g_{ab}$.

Volvamos al cálculo de la EE en $d = 4$. Buscamos una funcional invariante de Lorentz que se reduzca a (6.1.19) para γ constante. Hemos visto que las transformaciones de Lorentz actúan como transformaciones conformes sobre la esfera S^2 , y que $\log(\gamma/\epsilon)$ transforma como un campo dilatón. Reconocemos entonces (6.1.19) como el primer término de la acción de Wess-Zumino (6.1.22) evaluada en S^2 . Para preservar la invariancia de Lorentz, esperamos que la contribución a la EE de una curva $\gamma(y)$ deba ser de la forma

$$S_{WZ} = -\frac{A}{2\pi} \int d^2y \sqrt{g} \left(R \log \frac{\gamma(y)}{\epsilon} + \left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^2 \right), \quad (6.1.23)$$

con la normalización global fijada por (6.1.19) y la característica de Euler $\frac{1}{4\pi} \int d^2y \sqrt{g} R = 2$. Nótese que el coeficiente de $\log(\epsilon)$ es topológico y por lo tanto igual para todas las γ 's. En particular, esto implica que no hay anomalía tipo B en este coeficiente logarítmico. Esto puede verse como consecuencia de la geometría particular sobre el cono en la fórmula de Solodukhin [27] para el coeficiente de $\log(\epsilon)$ para regiones arbitrarias en $d = 4$. Véase el Apéndice E.

Esta es una funcional local, y por lo tanto satisface la propiedad de Markov. Pero como dijimos anteriormente, no es una funcional local en la métrica invariante de Weyl $\hat{g}_{ab} = \frac{\gamma(y)^2}{\epsilon^2} g_{ab}$ que introdujimos en (6.1.13). Sin embargo, la invariancia de Lorentz puede hacerse manifiesta si escribimos este como una funcional bilocal [203, 204]

$$S_{WZ} \propto \int d^2y \sqrt{\hat{g}} \int d^2y' \sqrt{\hat{g}} \hat{R}(y) \hat{G}(y, y') \hat{R}(y'), \quad (6.1.24)$$

con $\nabla_y^2 \hat{G}(y, y') = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \delta^2(y, y')$ la función de Green para \hat{g}_{ab} , y \hat{R} su escalar de curvatura. Usando

$$\sqrt{\hat{g}} \hat{R} = \sqrt{g} \left(R - 2\nabla^2 \log \frac{\gamma}{\epsilon} \right) \quad (6.1.25)$$

e integrando por partes, (6.1.24) se reduce a (6.1.23), salvo un término cuadrático en R que es independiente de γ .

La discusión se extiende a dimensiones mayores d_\perp , donde la anomalía de Weyl es proporcional a la densidad de Euler E_{d_\perp} (más otras anomalías invariantes conforme que se anulan en nuestro caso). El término de Wess-Zumino en la acción puede obtenerse sistemáticamente integrando la densidad de Euler [124, 202],

$$S_{WZ} = (-1)^{d_\perp/2} \frac{4A}{\chi_{d_\perp}} \int d^{d_\perp}y \sqrt{g} \int_0^1 dt \log \frac{\gamma(y)}{\epsilon} E_{d_\perp} \left(\left(\frac{\gamma(y)}{\epsilon} \right)^{2t} g_{ab} \right), \quad (6.1.26)$$

con $\chi_{d_\perp} = \int d^{d_\perp}y \sqrt{g} E_{d_\perp}(g)$ proporcional a la característica de Euler en la esfera. La contribución de $t = 0$ reproduce (6.1.19), y así es cómo se fija la normaliza-

ción. La integral general da una acción invariante conforme con derivadas de la forma $\int_y \log \frac{\gamma}{\epsilon} (\nabla^2)^{d_\perp/2} \log \frac{\gamma}{\epsilon}$. Expresiones explícitas en varias dimensiones pueden encontrarse en [46, 118, 196, 198, 201].

Para resumir, la EE de una región $\gamma(y)$ sobre el cono nulo en una CFT en dimensión d par viene dada por

$$\begin{aligned} S_n(\gamma) = & \int d^{d-2}y \sqrt{g} \left\{ \beta_0 \frac{\gamma(y)^{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + \beta_2 \frac{\gamma^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} \left((d-2)(d-3) + (d-3)(d-4) \left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^2 \right) \right. \\ & + \dots + (-1)^{d/2-1} \frac{4A_n}{\chi_{d-2}} \int d^{d-2}y \sqrt{g} \int_0^1 dt \log \frac{\gamma(y)}{\epsilon} E_{d-2} \left(\left(\frac{\gamma(y)}{\epsilon} \right)^{2t} g_{ab} \right) \Big\} \\ & + F_n. \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

El último término es la acción de Wess-Zumino en S^{d-2} para el campo dilatón $\log(\gamma/\epsilon)$, y generaliza el término universal logarítmico en la EE de la esfera. En este caso, $A_1 = A$ es justamente la anomalía de Euler.

Para comparar con el cálculo holográfico que haremos más adelante, veamos dos ejemplos explícitos. Para $d = 4$, usando la curvatura de S^2 , $R = 2$, obtenemos de (6.1.23),

$$S_{WZ} = -\frac{A}{2\pi} \int d^2\Omega \left(2 \log \frac{\gamma(y)}{\epsilon} + \left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^2 \right), \quad (6.1.28)$$

Para $d = 6$, usamos que la acción de Wess-Zumino (6.1.26) es [46]

$$S_{WZ} = \frac{4A}{\chi_4} \int d^4y \sqrt{g} \left(\phi E_4 - 4(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) \partial_a \phi \partial_b \phi - 4(\nabla\phi)^2 \nabla^2 \phi - 2(\nabla\phi)^4 \right), \quad (6.1.29)$$

con $\phi = \log(\gamma/\epsilon)$. Haciendo los cálculos para la esfera obtenemos⁵

$$S_{WZ} = \frac{3}{2\pi^2} A \int d^4\Omega \left\{ \log \frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^2 \left(\left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^2 - \frac{\nabla^2\gamma}{\gamma} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{\nabla\gamma}{\gamma} \right)^4 \right\}. \quad (6.1.30)$$

6.1.3. Un enfoque alternativo

Presentamos a continuación una construcción alternativa de la acción efectiva. Este enfoque es mas bien simple y muestra claramente cómo la invariancia de Lorentz de la teoría d -dimensional es usada. Se unifica además la discusión que separamos anteriormente entre d par e impar.

⁵Recuérdese que para un espacio máximamente simétrico en n dimensiones, $R_{\mu\nu} = \frac{R}{n} g_{\mu\nu}$, y $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$ [205]. Además, para la esfera de radio uno S^n , $R = n(n-1)$. La densidad de Euler en cuatro dimensiones es $E_4 = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2$, y para una esfera $E_4 = 24$.

Primero escribimos la métrica de una esfera con radio variable como el factor dilatón por la métrica del espacio plano,

$$\frac{\gamma(y)^2}{\epsilon^2} d\Omega_{d-2}^2 = e^{-2\tau(y)} \delta_{ab} dy^a dy^b, \quad e^{-\tau(y)} \equiv \frac{\gamma(y)}{\epsilon} \frac{2}{1 + (y^a)^2}. \quad (6.1.31)$$

Ver la discusión alrededor de (6.1.10). Buscamos una acción local, invariante ante rotaciones y traslaciones en \mathbb{R}^{d-2} , y ante transformaciones de escala $y \rightarrow e^\sigma y, \tau \rightarrow \tau + \sigma$.

Siguiendo la construcción para la acción efectiva para el dilatón en [198], esta puede organizarse en términos de los operadores diferenciales

$$W_k = \left(\frac{2}{d_\perp - 2k} \right)^2 e^{-\frac{d_\perp - 2k}{2} \tau} (\nabla^2)^k e^{-\frac{d_\perp - 2k}{2} \tau}, \quad (6.1.32)$$

que contienen $2k$ derivadas y transforman covariantemente ante transformaciones de escala,

$$W_k \rightarrow e^{-d_\perp \sigma} W_k. \quad (6.1.33)$$

De aquí concluimos que los objetos básicos invariantes de escala son $d^{d_\perp} y W_k$ y $e^{d_\perp \tau} W_r$, y que la acción efectiva más general es

$$S_\gamma = \sum_{k, \bar{r}, \bar{n}} \int d^{d_\perp} y \alpha_{k\bar{r}}^{\bar{n}} W_k \prod_i (e^{d_\perp \tau} W_{r_i})^{n_i}, \quad (6.1.34)$$

con $\alpha_{k\bar{r}}^{\bar{n}}$ coeficientes arbitrarios. El término proporcional a $\alpha_{k\bar{r}}^{\bar{n}}$ contiene $2k + 2 \sum_i n_i r_i$ derivadas. Una evaluación explícita de las primeras contribuciones en (6.1.34) reproduce los términos analizados en la Sección 6.1.2. Este enfoque tiene la ventaja de unificar las dimensiones pares e impares; en particular el término de Wess-Zumino surge de tomar el límite $k \rightarrow d_\perp/2$,

$$\int d^{d_\perp} y W_{k=d_\perp/2} = \int d^{d_\perp} y \tau (\nabla^2)^{d_\perp/2} \tau. \quad (6.1.35)$$

Esta es la razón de la normalización en (6.1.32). Por ejemplo, después de integrar por partes,

$$\int d^2 y \tau \nabla^2 \tau = \text{const} - \int d^2 \Omega \left(2 \log \frac{\gamma}{\epsilon} + \left(\frac{\nabla \gamma}{\gamma} \right)^2 \right), \quad (6.1.36)$$

que coincide con (6.1.23).

6.2. Análisis holográfico

En esta sección analizamos la entropía de entrelazado para regiones con frontera arbitraria sobre el plano nulo, y para CFTs, con frontera arbitraria sobre el cono nu-

lo, en teorías con dual holográfico. Por la fórmula de Ryu-Takayanagi [2, 111], esto se reduce a encontrar la superficie extrema anclada a la superficie $\gamma(y)$ en un espacio asintóticamente AdS. Este problema geométrico tiene algunos aspectos interesantes que no están presentes en el caso general. En particular encontraremos que la superficie extrema viene determinada por una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Veremos que la propiedad Markoviana se verifica. Reobtenemos la expresión general para la EE del vacío de una CFT reducido a una región con borde en el cono nulo que obtuvimos en la sección anterior. Mostramos también que este resultado se mantiene ante correcciones en N^{-1} y en el acoplamiento de 't Hooft λ .

6.2.1. Regiones con borde en el plano nulo

La métrica de un espacio asintóticamente AdS con simetría de Lorentz en su frontera asintótica y correspondiente al vacío en una teoría holográfica es

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (f^2(z)dz^2 + dx^+dx^- + d\vec{y}^2) , \quad (6.2.1)$$

con $x^\pm = x^1 \pm x^0$, $\vec{y} = (x^2, \dots, x^{d-1})$, y $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$. Además $z \in (0, \infty)$ y $y^i \in (-\infty, \infty)$. Queremos la superficie extremal (cuya área sea extremal) en el bulk anclada a una superficie $d - 2$ dimensional que vive en el borde de AdS y dada por

$$x^- = 0 , \quad x^+ = \gamma(\vec{y}) . \quad (6.2.2)$$

La superficie mínima tiene $d - 1$ dimensiones y elegimos parametrizarla por las coordenadas $\alpha^i \equiv (z, \vec{y})$. La métrica inducida en esta superficie es

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \alpha^j} = \frac{L^2}{z^2} \left(\delta_i^1 \delta_j^1 (f^2(z) - 1) + \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^+}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^-}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial x^-}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^+}{\partial \alpha^j} \right) \right) . \quad (6.2.3)$$

Queremos minimizar el área

$$\mathcal{A} = \int dz d^{d-2}y \sqrt{h} . \quad (6.2.4)$$

Tenemos dos ecuaciones de movimiento, una para x^+ y otra para x^- , y el Lagrangiano depende solamente de la derivada de los campos. La ecuación de movimiento para x^+ contiene solamente términos proporcionales a la derivada de x^- . Podemos tomar que

$$x^- = 0 , \quad (6.2.5)$$

y cumplir automáticamente con las condiciones de borde. Esto simplifica la ecuación de movimiento que viene de variar x^- , pues solo necesitamos quedarnos con los términos

lineales en $\partial_i x^-$ en (6.2.4). El resultado es

$$\nabla_y^2 x^+ + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial^2 x^+}{\partial z^2} - \left(\frac{f'}{f} + \frac{d-1}{z} \right) \frac{\partial x^+}{\partial z} \right) = 0. \quad (6.2.6)$$

Esta ecuación determina la superficie mínima, y sorprendentemente es lineal en x^+ . Una razón para esto es que si x^+ es una solución, λx^+ debe ser también solución pues resulta de la anterior de boostear la superficie (operación que deja invariante el álgebra y el vacío, y por ello la entropía de entrelazado, que es proporcional al área mínima en el bulk). Notamos que es la misma ecuación que la de un campo escalar de masa cero en la métrica del bulk (6.2.1).

Como hemos obtenido una superficie mínima que yace completamente en el plano $x^- = 0$ del bulk, el área de esta superficie debe ser calculada con la métrica inducida

$$ds^2|_{\mathcal{M}} = \frac{L^2}{z^2} (f^2(z) dz^2 + d\vec{y}^2), \quad (6.2.7)$$

que es completamente independiente de la forma de $x^+(z, \vec{y})$. Por ello, una vez que hemos fijado el regulador $z = \epsilon$ e integrado el volumen de este plano z, \vec{y} para todas las \vec{y} y $z > \epsilon$, el área es independiente de $\gamma(\vec{y})$. El resultado vale para toda $f(z)$, o sea, es válido para una CFT ($f = 1$) y también para una teoría con escala ($f \neq 1$). Esto verifica los argumentos dados en la Sección 5.7, y nos da la propiedad Markoviana del vacío de una teoría holográfica. De hecho, el área es la misma para cualquier superficie sobre el plano $x^- = 0$, pero solo la solución de (6.2.6) es extremal.

En AdS puro, podemos dar una solución explícita de la superficie extremal. Cuando $f = 1$, (6.2.6) se reduce a

$$\left(\nabla_y^2 + \partial_z^2 - \frac{d-1}{z} \partial_z \right) x^+ = 0. \quad (6.2.8)$$

Haciendo la transformada de Fourier en las variables \vec{y} y eligiendo la solución que es regular en $z \rightarrow \infty$, obtenemos la solución completa del sistema

$$\begin{aligned} x^+(z, y) &= \frac{2^{1-d/2}}{\Gamma[d/2]} \int d^{d-2}k \, a_{\vec{k}} \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{y}} (|\vec{k}|z)^{d/2} K_{d/2}(|\vec{k}|z), \\ a_{\vec{k}} &= \int \frac{d^{d-2}y}{(2\pi)^{d-2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y}} \gamma(\vec{y}). \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

6.2.2. Regiones con borde en el cono nulo

A continuación consideremos la entropía del vacío de una CFT para regiones con borde sobre el cono nulo. Una idea podría ser obtener la superficie extremal y las áreas mapeando la solución conocida del plano al cono nulo, y una vez allí calcular la

EE fijando un cutoff en la coordenada z . Sin embargo, haremos el cálculo en el cono directamente. Nos enfocamos en curvas $\gamma(\Omega)$ suaves, y separamos el análisis para el caso con defectos al Apéndice D.

Para AdS puro hay una transformación conforme en la frontera de AdS que transforma el plano al cono nulo y se extiende como una isometría al interior de AdS, preservando la condición de extremal de una superficie extrema, y su área. Por ello, la única diferencia en calcular una EE en el plano o el cono nulo vendrá de la posición del cutoff. La isometría en AdS que corresponde a (5.2.1) viene de extender esta simetría conforme a una dimensión más z . Tenemos la misma fórmula que (5.2.1) pero ahora los vectores tienen $d + 1$ componentes, y $x^{d+1} = z$, $X^{d+1} = Z$. La métrica de AdS es invariante ante estas transformaciones⁶. La superficie $X^0 = 0$, $X^1 = 0$, que corresponde a la superficie mínima del espacio de Rindler, es mapeada al hemisferio esférico

$$|\vec{x}|^2 = r^2 + z^2 = R^2, \quad t = -R, \quad (6.2.10)$$

que es la superficie mínima en AdS anclada a una esfera en el borde de AdS.

La superficie $t + |\vec{x}| = 0$, que es el cono nulo pasado en el bulk del punto en el origen, es mapeado al plano $X^- = 0$. Por ello la superficie mínima en la que estamos interesados yace sobre el cono nulo del bulk.

Para mostrar mejor las ideas geométricas de la propiedad de Markov en AdS, elegimos las siguientes coordenadas

$$\tilde{r} = |\vec{x}| = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \tilde{r}^\pm = \tilde{r} \pm t, \quad \tilde{\Omega}, \quad (6.2.11)$$

donde $\tilde{\Omega}$ son las coordenadas angulares en la semiesfera $t = \text{const}$, $\tilde{r} = \text{const}$. Para la superficie $\tilde{r}^+ = 0$ cada $\tilde{\Omega}$ constante describe una línea nula que pasa por el origen. Escribimos

$$z = \tilde{r} \sin(\theta), \quad \theta \in (0, \pi/2), \quad (6.2.12)$$

con $\theta = \pi/2$ correspondiendo al punto de la esfera más alejado de la frontera de AdS, y $\theta = 0$ a la frontera de AdS. La métrica de AdS se escribe

$$ds^2 = L^2 \frac{d\tilde{r}^+ d\tilde{r}^- + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta}, \quad (6.2.13)$$

donde

$$d\tilde{\Omega}^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\Omega_{d-2}^2, \quad (6.2.14)$$

y Ω son coordenadas angulares de la esfera $(d - 2)$ -dimensional de la frontera de AdS.

⁶Sin embargo, para que sea una isometría, la componente z del vector C en (5.2.1) debe ser cero.

Sobre la superficie $\tilde{r}^+ = 0$, la métrica inducida

$$ds^2 = L^2 \frac{d\tilde{\Omega}^2}{\sin^2 \theta} = L^2 \frac{d\theta^2 + \cos^2 \theta d\Omega_{d-2}^2}{\sin^2 \theta}, \quad (6.2.15)$$

es independiente de las coordenadas $\tilde{r}^- = 2\tilde{r} = -2t$. Esto muestra que, si nos olvidamos del cutoff todas las superficies mínimas tienen la misma métrica inducida y área (divergente). Si imponemos un cutoff en θ independiente de Ω obtenemos de vuelta el mismo resultado de que todas las áreas (ahora finitas) son iguales, de forma análoga a lo que pasaba en el plano. Sin embargo, debemos imponer un cutoff invariante de Lorentz, o sea, un cutoff en la coordenada z . Toda la dependencia sobre la forma de la superficie γ vendrá de esta elección de cutoff.

Superficies extremas y el cutoff covariante

Veamos la ecuación de movimiento de la superficie mínima. Llamemos α^i a las $d-1$ coordenadas $\tilde{\Omega}$ sobre la esfera y a la métrica sobre la esfera \tilde{g}_{ij} . Debemos extremizar la acción

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int d^{d-1} \alpha \frac{\det^{1/2}(\tilde{g})}{\sin^{d-1}(\theta)} \det(\delta_l^j + \tilde{g}^{jk} \partial_k \tilde{r}^+ \partial_l \tilde{r}^- / \tilde{r}^2)^{1/2} \\ &= \int d^{d-2} \Omega d\theta \frac{(\cos \theta)^{d-2}}{(\sin \theta)^{d-1}} \det(\delta_l^j + \tilde{g}^{jk} \partial_k \tilde{r}^+ \partial_l \tilde{r}^- / \tilde{r}^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

con respecto a variaciones de $\tilde{r}^\pm(\tilde{\Omega})$. La ecuación de movimiento para \tilde{r}^- es satisfecha, a la vez que las condiciones de contorno, tomando $\tilde{r}^+ = 0$. La ecuación de movimiento para \tilde{r}^+ queda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - ((d-2) \tan \theta + (d-1) \cot \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \nabla_\Omega^2 \right) (\tilde{r}^-)^{-1} = 0. \quad (6.2.17)$$

La misma ecuación vale para \tilde{r} , pues esta es $\tilde{r}^-/2$. Nótese que la ecuación para $(\tilde{r}^-)^{-1}$ es lineal como en el caso de la ecuación para x^+ con frontera sobre el plano nulo. Esto es porque estas variables están linealmente relacionadas por la transformación conforme (o la isometría en AdS) que lleva el plano nulo al cono nulo.

La curva sobre la frontera (condición de contorno) es de la forma $r = \gamma(\Omega)$, donde $r = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{d-1})^2}$. La superficie mínima toma la forma $\tilde{r}^+ = 0$, $\tilde{r}(\theta, \Omega)$, con $\tilde{r}(0, \Omega) = r(\Omega) = \gamma(\Omega)$, y yace en el cono nulo del bulk, como ilustra la Figura 6.2. La

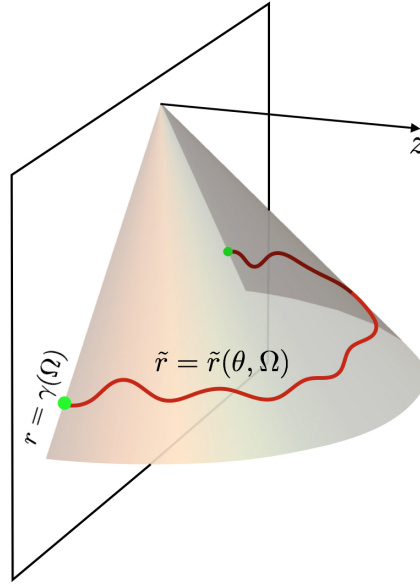


Figura 6.2: Superficie extrema en el bulk anclada en la superficie $r = \gamma(\Omega)$ del borde. Esta superficie está sobre un cono nulo en el bulk.

solución de (6.2.17) que es regular hacia el interior de AdS $\theta \rightarrow \pi/2$ es⁷

$$(\tilde{r}(\theta, \Omega))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_I \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d-1+n)}{2^{d+n-2} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d-1+2n}{2})} a_{nI} Y_n^I(\Omega) (\cos \theta)^n {}_2F_1\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{d-1}{2} + n, \cos^2 \theta\right), \quad (6.2.18)$$

donde $Y_n^I(\Omega)$ son los armónicos esféricos de grado n sobre la esfera S^{d-2} ,

$$\nabla_{\Omega}^2 Y_n^I(\Omega) = -(n+d-3)n Y_n^I(\Omega), \quad n > 0, \quad (6.2.19)$$

e I es un multi-índice para las autofunciones del autovalor de orden n . El prefactor en (6.2.18) se eligió para simplificar los valores de la función hipergeométrica en $\theta = 0$, y a_{nI} son los coeficientes de la expansión de γ^{-1} en armónicos esféricos,

$$\gamma(\Omega)^{-1} = \sum_I a_{nI} Y_n^I(\Omega). \quad (6.2.20)$$

Queremos imponer el cutoff invariante de Lorentz estandar en

$$z = \tilde{r}(\theta, \Omega) \sin(\theta) = \epsilon. \quad (6.2.21)$$

Llamemos $\theta = \beta(\Omega)$ a la solución de esta ecuación; esta va a depender del cutoff ϵ y

⁷Esta solución fue también obtenida en [206].

de la curva $\gamma(\Omega)$. El área mínima es entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= L^{d-1} \int d^{d-2}\Omega \int_{\beta(\Omega)}^{\pi/2} d\theta \frac{(\cos \theta)^{d-2}}{(\sin \theta)^{d-1}} \\ &= L^{d-1} \int d^{d-2}\Omega \frac{1}{d-1} (\cos \beta)^{d-1} {}_2F_1\left(\frac{d-1}{2}, \frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}, \cos^2 \beta\right).\end{aligned}\quad (6.2.22)$$

La entropía tiene entonces la forma de una acción local. Además, y como habíamos anticipado, toda la dependencia en $\gamma(\Omega)$ resulta a través del cutoff β . Como $\beta \sim \mathcal{O}(\epsilon)$, expandimos en β pequeña, obteniéndose

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= L^{d-1} \int d^{d-2}\Omega \left\{ \frac{1}{d-2} \frac{1}{\beta^{d-2}} - \frac{2d-5}{6(d-4)} \frac{1}{\beta^{d-4}} + \left(\frac{3}{8(d-6)} + \frac{d}{18} - \frac{1}{45} \right) \frac{1}{\beta^{d-6}} + \dots \right\} \\ &\quad + A_0.\end{aligned}\quad (6.2.23)$$

Aquí

$$A_0 = L^{d-1} \int d^{d-2}\Omega \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sin \frac{\pi d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} = L^{d-1} \frac{\pi^{d/2}}{\sin \frac{\pi d}{2} \Gamma(\frac{d}{2})}.\quad (6.2.24)$$

Para evaluar esta expresión necesitamos primero expandir β en potencias de ϵ . Además del término constante, (6.2.18) contiene una serie que comienza a orden θ^2 y otra que comienza a orden θ^d . Explícitamente,

$$\begin{aligned}(\tilde{r}(\theta, \Omega))^{-1} &= \gamma(\Omega)^{-1} \\ &+ \sum_{n \geq 1, I} a_{nI} Y_n^I(\Omega) \frac{n(n+d-3)}{2(d-2)} \theta^2 \left\{ -1 + \frac{3n(n+d-3) - 2(d-1)}{12(d-4)} \theta^2 + \dots \right\} \\ &- \sum_{n \geq 1, I} a_{nI} Y_n^I(\Omega) \theta^d \left\{ -\frac{\pi}{2^d \sin \frac{\pi d}{2}} \frac{\Gamma(d+n-1)}{\Gamma(n-1) \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d+2}{2})} + \mathcal{O}(\theta^2) \right\}.\end{aligned}\quad (6.2.25)$$

La serie en θ^2 puede ser reescrita en términos de la derivada de $\gamma(\Omega)^{-1}$ por medio de (6.2.19),

$$\begin{aligned}(\tilde{r}(\theta, \Omega))^{-1} &= \gamma(\Omega)^{-1} + \frac{1}{2(d-2)} \nabla_\Omega^2(\gamma^{-1}) \theta^2 \\ &+ \frac{1}{24(d-2)(d-4)} (2(d-1) \nabla_\Omega^2(\gamma^{-1}) + 3 \nabla_\Omega^2 \nabla_\Omega^2(\gamma^{-1})) \theta^4 + \dots\end{aligned}\quad (6.2.26)$$

Esto también puede verse resolviendo (6.2.17) en potencias de θ^2 . La serie que comienza a orden θ^d no parece tener una expresión local en las derivadas de γ^{-1} . Esta serie viene fijada por la regularidad en $\theta \rightarrow \pi/2$, que es la condición que impone (6.2.18). Estos términos modifican la EE a orden ϵ^2 , y por lo tanto se anulan en el límite en que el cutoff va a cero. Eliminamos estos términos en la discusión que sigue.

Sustituir (6.2.26) en (6.2.21) nos lleva a la solución en serie de potencias

$$\beta(\Omega) = \epsilon \gamma(\Omega)^{-1} + \frac{1}{6} \epsilon^3 \gamma(\Omega)^{-3} \left(1 + \frac{3}{d-2} \gamma \nabla_{\Omega}^2 (\gamma^{-1}) \right) + \dots \quad (6.2.27)$$

Usamos (6.2.23) y (6.2.27) para estudiar la superficie de área extrema a través de una expansión en derivadas. Para d general tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & L^{d-1} \int d^{d-2} \Omega \left\{ \frac{1}{d-2} \frac{\gamma^{d-2}}{\epsilon^{d-2}} - \frac{d-3}{2(d-2)(d-4)} \frac{\gamma^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} \left((d-2) + \frac{d-4}{d-3} \gamma \nabla_{\Omega}^2 (\gamma^{-1}) \right) \right. \\ & + \frac{(d-3)(d-5)}{8(d-2)(d-4)(d-6)} \frac{\gamma^{d-6}}{\epsilon^{d-6}} \left[(d-2)(d-4) + \frac{(d-4)(d-6)}{(d-2)(d-3)} (\gamma \nabla_{\Omega}^2 (\gamma^{-1}))^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{d-6}{(d-3)(d-5)} (\gamma \nabla_{\Omega}^4 (\gamma^{-1}) - 2(d-3)(d-5) \gamma \nabla_{\Omega}^2 (\gamma^{-1})) \right] + \dots \right\}. \quad (6.2.28) \end{aligned}$$

Dimension impar

Para d impar reconocemos en (6.2.28) la expansión en derivadas en términos de los Laplacianos conformes que presentamos en (6.1.18) y (6.1.32). Además, (6.2.24) nos da el término universal constante para la EE en teorías con dual holográfico con gravedad de Einstein. Tiene el factor correcto de la estructura de signos $(-1)^{\frac{d-1}{2}}$. Comparando con (6.1.18) podemos identificar

$$F = (-1)^{\frac{d-1}{2}} \frac{L^{d-1}}{4G_N} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \quad (6.2.29)$$

Este valor de F es el mismo para cualquier $\gamma(\Omega)$ sobre el cono, y coincide (como debe ser) con el resultado holográfico para la esfera [150].⁸

En particular, para $d = 3$ (6.2.28) es

$$\mathcal{A} = L^2 \int d\Omega \left(\frac{\gamma}{\epsilon} - 1 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right). \quad (6.2.30)$$

Notemos de (6.2.28) que el término de orden ϵ es una derivada total $\nabla_{\Omega}^2 (\gamma^{-1})$ en $d = 3$. Para $d = 5$, y después de integrar por partes

$$\mathcal{A} = L^4 \int d^3 \Omega \left\{ \frac{1}{3} \frac{\gamma^3}{\epsilon^3} - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\epsilon} \left(3 + \left(\frac{\nabla_{\Omega} \gamma}{\gamma} \right)^2 \right) + \frac{2}{3} + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}. \quad (6.2.31)$$

Como en (6.1.17), los últimos dos términos nos dan el término cinético de un campo escalar conformemente acoplado, y el primer término equivale a un potencial clásico

⁸Por cierto abuso de la notación tomamos el signo $(-1)^{\frac{d-1}{2}}$ como parte de F , de acuerdo con nuestra notación en (6.1.18). Sin embargo, la notación estandar para F no incluye en signo, como en (6.1.6).

invariante conforme.

Dimension par

Para d par, la expresión (6.2.28) nos da el término logarítmico universal en la EE,

$$\frac{1}{d-2n} \frac{\gamma^{d-2n}}{\epsilon^{d-2n}} \rightarrow \log \frac{\gamma}{\epsilon} \quad (6.2.32)$$

para $d \rightarrow 2n$. Esto también nos da el término correcto de Wess-Zumino, aunque no es claro cómo reescribir la expresión anterior con las funciones hipergeométricas como en (6.1.26). Veamos las expresiones en $d = 4, 6$.

Para $d = 4$,

$$\mathcal{A} = L^3 \int d^2\Omega \left\{ \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2} \log \frac{\gamma}{\epsilon} - \frac{1}{4} \left(\frac{\nabla_\Omega \gamma}{\gamma} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\}. \quad (6.2.33)$$

El segundo y el tercer término combinados nos da la acción de WZ dos-dimensional (6.1.23).

Para $d = 6$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & L^5 \int d^4\Omega \left\{ \frac{1}{4} \frac{\gamma^4}{\epsilon^4} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\epsilon^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \gamma \nabla_\Omega^2 (\gamma^{-1}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left(3 \log \frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{1}{16} (\gamma \nabla_\Omega^2 (\gamma^{-1}))^2 - \frac{1}{8} \gamma \nabla_\Omega^4 (\gamma^{-1}) + \frac{3}{4} \gamma \nabla_\Omega^2 (\gamma^{-1}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

No es difícil ver que este resultado es una combinación de la acción de WZ (6.1.28) y la que resulta de los dos términos invariantes conformes contruídos de \hat{R}^2 y \hat{R}_{ab}^2 en (6.1.14). Este es un chequeo no trivial, dado que los cuatro términos en la última línea de (6.2.34) son reproducidos por la fórmula de QFT, que tiene tres contribuciones independientes a este orden.

El análisis y la verificación de que estos resultados no se modifican cuando γ no es suave, la relegamos al Apéndice D.

6.2.3. Teorías de la gravedad con más derivadas (o correcciones en el acoplamiento λ de 't Hooft)

En esta sección extenderemos los resultados anteriores ante correcciones de cuerdas, que es lo mismo que correcciones en el parámetro de 't Hooft. Esto es equivalente a analizar teorías de la gravedad que resultan de una acción con más derivadas. Ciertas teorías de la gravedad con más derivadas en un espacio asintóticamente AdS equivalen holográficamente, por la correspondencia AdS/CFT, a correcciones $1/\lambda$ en el parámetro

de 't Hooft λ de la CFT dual. La forma general de la EE holográfica en los casos de Lagrangianos gravitatorios de más derivadas fue discutida en [207, 208]. El resultado es una funcional geométrica calculada en una superficie de Ryu-Takayanagi generalizada Σ , que incluye términos de curvatura intrínseca y extrínseca.

Queremos discutir aquí brevemente cómo nuestros resultados generales anteriores son válidos también en estos modelos.

Para una acción gravitatoria que es función arbitraria del tensor de curvatura de Riemann, la funcional de entropía generalizada tiene dos tipos de términos. El primero es la fórmula de Wald

$$- 2\pi \int d^{d-1}y \sqrt{g} \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\rho\nu\sigma}} \varepsilon_{\mu\rho} \varepsilon_{\nu\sigma}, \quad (6.2.35)$$

donde

$$\varepsilon_{\mu\nu} = n_{\mu}^{(a)} n_{\nu}^{(b)} \varepsilon_{ab}, \quad (6.2.36)$$

los vectores $n^{(a)}$, $a = 1, 2$, son dos vectores normalizados y normales a la superficie RT de codimension dos, y ε_{ab} es el tensor usual de Levi-Civita dos dimensional. En lo que sigue es conveniente tomar $n^{(a)}$ como dos vectores nulos ortogonales a la superficie y normalizados por $n^{(1)} \cdot n^{(2)} = 1$. El segundo tipo de términos involucra a la curvatura extrínseca de la superficie, y es proporcional a

$$\begin{aligned} & \int d^{d-1}y \sqrt{g} \frac{\partial^2 L}{\partial R_{\mu_1\rho_1\nu_1\sigma_1} \partial R_{\mu_2\rho_2\nu_2\sigma_2}} K_{\lambda_1\rho_1\sigma_1} K_{\lambda_2\rho_2\sigma_2} \\ & \times \left((\eta_{\mu_1\mu_2} \eta_{\nu_1\nu_2} - \varepsilon_{\mu_1\mu_2} \varepsilon_{\nu_1\nu_2}) \eta^{\lambda_1\lambda_2} + (\eta_{\mu_1\mu_2} \varepsilon_{\nu_1\nu_2} + \varepsilon_{\mu_1\mu_2} \eta_{\nu_1\nu_2}) \varepsilon^{\lambda_1\lambda_2} \right). \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

Aquí η es el proyector sobre el espacio normal a la superficie.

$$\eta_{\mu\nu} = n_{\mu}^{(1)} n_{\nu}^{(2)} + n_{\mu}^{(2)} n_{\nu}^{(1)}. \quad (6.2.38)$$

La curvatura extrínseca está dada por

$$K_{\lambda\mu\nu} = n_{\lambda}^{(2)} P_{\mu}^{\alpha} P_{\nu}^{\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta}^{(1)} + n_{\lambda}^{(1)} P_{\mu}^{\alpha} P_{\nu}^{\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta}^{(2)}, \quad (6.2.39)$$

donde P es el proyector sobre el espacio tangente a la superficie

$$P_{\mu}^{\alpha} = g_{\nu}^{\alpha} - \eta_{\mu}^{\alpha}. \quad (6.2.40)$$

AdS puro corresponde al vacío de una CFT. Por ser AdS máximamente simétrico, el tensor de curvatura es proporcional a combinaciones de productos de la métrica. Consecuencia de esto, el término de Wald (6.2.35) es proporcional a la funcional área.

Consideremos una superficie Σ que yace sobre el cono nulo del bulk $\tilde{r}^+ = 0$. En este caso podemos tomar $n^{(1)}$ como el vector de Killing paralelo (y ortogonal, por tener la

métrica signatura de Lorentz). Tenemos entonces que

$$(\nabla_\alpha n_\beta^{(1)} + \nabla_\beta n_\alpha^{(1)}) = 0. \quad (6.2.41)$$

Como el tensor de curvatura extrínseco (6.2.39) es simétrico en μ, ν , la contribución de la derivada de $n^{(1)}$ se anula. Como consecuencia, solo un término de la curvatura extrínseca (6.2.39) permanece en este caso, y el integrando en (6.2.37) también se anula. Tenemos aquí una situación análoga a la de superficies γ sobre el plano nulo, que discutimos en la Sección 5.7. Las áreas de cualquier superficie sobre el cono nulo de AdS son las mismas, ya que solo la proyección de la superficie ortogonal a $n^{(1)}$ contribuyen, y hay una isometría que muestra que estas proyecciones son iguales a lo largo de la dirección nula. Por tanto, sobre el cono nulo del bulk, todas las superficies dan el mismo valor de la funcional.

Las ecuaciones que fijan la posición de Σ en el caso general se obtienen de extremizar la funcional de entropía [209]. Para superficies sobre el cono nulo, las variaciones de esta funcional ante variaciones de la posición contenidas sobre el cono nulo se anulan. Análogamente al caso de gravedad de Einstein, una de las ecuaciones de movimiento y las condiciones de borde se resuelven poniendo Σ sobre el cono nulo. La otra ecuación de movimiento fijará la forma de la superficie sobre el cono mismo. Sobre el cono, la funcional es proporcional al área, y esto deja de ser válido si deformamos la superficie fuera del cono. Esperamos que la ecuación diferencial que determina \tilde{r}^- se modifique por estas correcciones de altas derivadas en el Lagrangiano. Sin embargo, esta ecuación seguirá siendo lineal. Esto debido a que, como dijimos en la Sección 6.2.1, la invariancia de la entropía antes boost debe ser reflejada por una ecuación lineal para regiones sobre el plano nulo, y una transformación conforme nos llevará a una ecuación lineal para $(\tilde{r}^-)^{-1}$.

En cualquier caso, una vez que la superficie está determinada, la propiedad Markoviana se sigue del hecho de que la funcional sobre el cono nulo del bulk se reduce a ser proporcional al área, y el área de superficies sobre el cono nulo del bulk es independiente de la forma de la superficie. Los resultados solo puede ser modificados por la posición del cutoff. Pero otra vez, tendremos una expresión local para la entropía como función de γ , con el mismo tipo de términos que encontramos en la Sección 6.1. La única diferencia podría ser en los coeficientes de los términos independientes, en particular el valor de la anomalía. Esto puede calibrarse calculando la entropía de la esfera, como en [210].

6.2.4. Correcciones $1/N$

De acuerdo con [211], las correcciones $1/N$ a la EE en el límite de N grande viene de correcciones cuánticas en el bulk. Uno debe en este caso sumar la EE de los campos cuánticos que viven en el bulk a través de la superficie de Ryu-Takayanagi.

Para las regiones sobre el cono nulo que estamos considerando, esta superficie RT de entrelazado yace completamente en el cono nulo $\tilde{r}^+ = 0$ de AdS. Podemos entonces aplicar los argumentos de la Sección 5.7 para el plano nulo en el espacio de Minkowski. La EE de los campos cuánticos en el bulk debe ser una funcional de las superficies sobre el cono nulo en el bulk, y repitiendo los argumentos de la Sección 5.7, esta funcional es independiente de la forma de la superficie. Sucederá lo mismo en el cono ya que existe una isometría en AdS que lleva el plano nulo al cono nulo. En la CFT en el borde de AdS podemos tomar la región γ sobre el cono nulo y una esfera γ' , también sobre el mismo cono nulo, y que no la corte. El flujo modular de γ' moverá a γ hacia γ' tanto como queramos. En el bulk, esto corresponde a una isometría que aplastará la superficie de RT correspondiente a γ hacia la superficie de RT correspondiente a la esfera γ' (que es también una esfera en el bulk). Esta isometría mantiene el vacío invariante y respeta a un cutoff covariante del bulk, por lo que mantendrá la EE del bulk invariante.

Concluimos entonces que la corrección cuántica (entropía en el bulk), excepto por términos que vengan de un cutoff UV en la frontera, será la misma para todas las regiones sobre el cono nulo, y preservarán la propiedad Markoviana. Esperamos la misma estructura que en la Sección 6.1, con correcciones sobre los coeficientes de los términos independientes.

Capítulo 7

El Teorema A entrópico

En los Capítulos anteriores hemos obtenido la forma explícita de la entropía de una CFT en una región con borde sobre el cono nulo, hemos calculado esta explícitamente en el caso holográfico, y hemos probado la propiedad Markoviana del vacío para estas regiones. En este Capítulo usaremos esta información para demostrar el Teorema-A en $d = 4$, usando la entropía de entrelazado del vacío[42]. Esta prueba sigue las ideas de los casos en dimensiones menores ($d = 2, 3$) discutidos en las Secciones 3.4.1 y 3.4.2, [40, 41], donde la SSA para la EE fue aplicada para esferas (intervalos o círculos en $d = 2$ y $d = 3$ respectivamente) sobre el cono nulo para demostrar la monotonicidad de las cantidades c y F . En particular, el resultado (6.1.27) para la EE de una región con borde arbitrario sobre el cono nulo nos permitirá ver explícitamente por qué la propiedad de Markov tiene que ser invocada como un ingrediente indispensable en el caso de $d = 4$, en oposición a lo que ocurre en los casos de $d = 2$ y $d = 3$. Sin embargo, podemos decir que la propiedad Markoviana del vacío juega un papel importante y oculto en dimensión menor que $d = 4$. Esto es porque, si la SSA nos puede decir algo útil sobre el flujo del GR, debe ser el caso que, para las CFTs, los puntos fijos de un flujo del GR, donde no hay flujo ni escalas, esta desigualdad se sature. Esta es la razón física del por qué estudiar superficies con borde sobre el cono nulo. Para regiones A y B con borde fuera del cono nulo, las álgebras $A - B$ y $B - A$ tienen volumen espacio-temporal y pueden contribuir al entrelazamiento, arruinando la saturación de la SSA (propiedad Markoviana).

En la demostración de los Teoremas c y F se usó la forma simétrica

$$\sum_i S(X_i) \geq S(\cup_i X_i) + S(\cup_{\{ij\}} (X_i \cap X_j)) + S(\cup_{\{ijk\}} (X_i \cap X_j \cap X_k)) + \dots + S(\cap_i X_i), \quad (7.0.1)$$

de la Subaditividad Fuerte

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B) + S(A \cap B), \quad (7.0.2)$$

aplicada a N esferas boosteadas y sobre un cono nulo. De esta forma, los conjuntos del miembro derecho de (7.0.1) lucen como esferas irregulares, con puntas, cantos, y otros defectos. La Figura 3.7 solo muestra el caso de $d = 3$, donde los defectos solo son esquinas, aunque en dimensión mayor encontramos otros defectos. En el límite de N grande y radio \sqrt{rR} de las esferas boosteadas en el miembro izquierdo de (7.0.1), esta desigualdad puede escribirse como

$$S(\sqrt{rR}) \geq \int_r^R dl \beta(l) \tilde{S}(l). \quad (7.0.3)$$

Aquí $\tilde{S}(l)$ son las entropías de las esferas irregulares de radio aproximado $l \in (r, R)$ y $\beta(l)$ la densidad de estas esferas irregulares en el límite $N \rightarrow \infty$ (calculada en detalle en el Apéndice A)

$$\beta(l) = \frac{\text{Vol}(S_{d-3})}{\text{Vol}(S_{d-2})} \frac{2^{d-3} (rR)^{\frac{d-2}{2}} ((l-r)(R-l))^{\frac{d-4}{2}}}{l^{d-2} (R-r)^{d-3}}. \quad (7.0.4)$$

El gran obstáculo que presenta (7.0.3) es que no está justificado tomar las entropías de las esferas irregulares $\tilde{S}(l)$ como las entropías de esferas (suaves) $S(l)$ del mismo radio. En caso de que lo hiciéramos, tendríamos en ambos miembros de (7.0.3) entropías de esferas, y podríamos tomar el límite $R \rightarrow r$. Tomando en cuenta la expresión (7.0.4) en (7.0.3), este límite nos daría una desigualdad interesante para la entropía en toda dimensión d

$$r S''(r) - (d-3) S'(r) \leq 0. \quad (7.0.5)$$

Esta desigualdad es incorrecta para $d \geq 4$. Esto puede comprobarse en el punto fijo en $d = 4$, en donde la EE de una esfera tiene la forma

$$S(r) = \mu_2 \frac{r^2}{\epsilon^2} - 4 A \log(r/\epsilon). \quad (7.0.6)$$

Si sustituímos esta expresión en (7.0.5) obtendremos el resultado incorrecto de que la anomalía A tiene signo negativo.

Las esferas irregulares tienden en algún sentido a las esferas suaves del mismo radio, aunque, si bien la amplitud de las irregularidades tiende a cero en el límite de N grande, la pendiente de la irregularidad permanece fija, dependiendo solo del radio l .

En este punto, surgen tres cuestiones diferentes que debemos entender para poder extraer alguna información útil para los teoremas de irreversibilidad usando (7.0.5). La primera cuestión es si la desigualdad contiene información independiente del cutoff, o sea, si las divergencias se cancelan entre todos los miembros de la desigualdad. Como las divergencias son locales sobre el borde de la región esto equivale a saber si los defectos de las esferas irregulares, que resultan de la unión y la intersección de dos o más esferas

suaves, dan lugar a divergencias que no estén balanceadas en la desigualdad. La segunda cuestión es si, en caso de que la desigualdad contenga información sobre cantidades finitas, si esta puede ser extraída de una forma útil. En otras palabras, si, y cómo, la entropía de las esferas irregulares puede ser relacionada con la entropía de esferas. La tercera y última cuestión es si la desigualdad y las cantidades involucradas tienen alguna relación con las cargas centrales de los puntos fijos. Discutiremos y resolveremos en lo que sigue cada uno de estos puntos. Esto tendrá como consecuencia la validez de una desigualdad general y similar a (7.0.5), de la cual se deriva el Teorema A en $d = 4$, y que unifica los teoremas de irreversibilidad del GR en dimensiones $d = 2, 3, 4$ como una propiedad de la entropía de entrelazado del vacío [42, 52].

7.1. La desigualdad es UV finita

A continuación veremos que todas las divergencias UV se cancelan en (7.0.3), [42]. Primero presentaremos un argumento simple para evitar las divergencias asociadas con las esquinas o los defectos que resultan de la intersección y unión de esferas boosteadas, de forma que la desigualdad no se haga trivial y contenga información no dependiente del cutoff. Después veremos cómo, aún si no procedemos de esta forma, las contribuciones de los defectos se anulan, o bien por si mismas, debido a la geometría particular del cono nulo, o bien entre ellas, en la combinación de la SSA. Suponemos que un cutoff invariante de Lorentz regulariza la entropía. Una definición general para regularizar la entropía con un cutoff invariante de Lorentz en una QFT arbitraria puede lograrse usando la información mutua, como se discute en el Apéndice C.

Queremos evitar las contribuciones adicionales provenientes de los defectos de la intersección y unión de las esferas en la SSA, que podrían desbalancear esta desigualdad infinitamente y hacerla inútil para su aplicación al GR. La idea es deformar ligeramente las esferas de radio \sqrt{rR} en el miembro izquierdo de la desigualdad, en los puntos donde ocurre la intersección con las otras, y manteniendo la deformación sobre el cono nulo, de forma que la intersección y unión sea suave, ver Figura 7.1. En este caso no tendremos defectos. El precio pagado es que no tendremos esferas perfectas en el miembro izquierdo de la desigualdad, sino esferas onduladas de radio aproximado \sqrt{rR} . La desigualdad quedaría entonces

$$\frac{1}{N} \sum_i \tilde{S}_i(\sqrt{rR}) \geq \int_r^R dl \beta(l) \tilde{S}(l), \quad (7.1.1)$$

donde $\tilde{S}(l)$ es la entropía de las esferas onduladas de radio aproximado l y de nuevo, la integral en el miembro derecho es una forma breve de escribir la suma por N términos. En este caso, el precio pagado no es tan alto, ya que teníamos que lidiar con esferas irregulares en el miembro derecho.

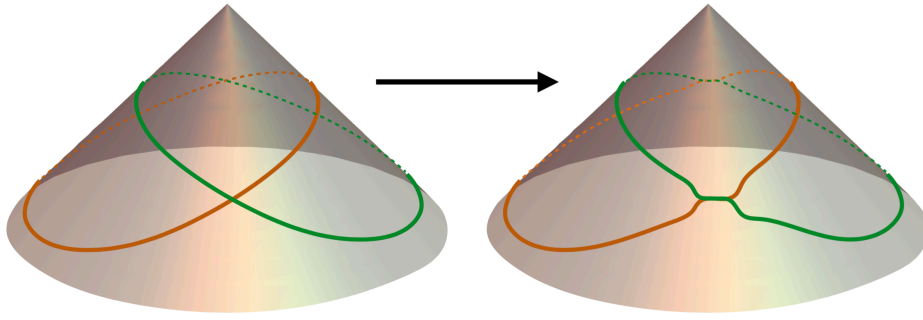


Figura 7.1: Deformaciones de las esferas sobre el cono nulo para que su intersección y unión sean suaves.

De forma alternativa, podemos hacer un análisis más detallado de lo que ocurre si no hacemos las deformaciones anteriores de las esferas y los defectos están presentes.

1) Primero, como (7.0.3) se obtuvo de una serie de desigualdades SSA, la propiedad de Markov requiere que las divergencias se cancelen para una CFT. Veamos cómo sucede esto. Las nuevas posibles divergencias asociadas con los defectos provocadas por la intersección y unión de esferas vienen dadas por integrales locales de cantidades geométricas de los defectos. Un punto clave al respecto es que estos defectos viven en un cono nulo. La divergencia principal es proporcional a la dimensión del defecto, y los términos sub-dominantes vendrán dados por integrales de términos de curvatura superiores. Para una CFT, las dimensiones de estos término vienen compensadas por potencias del inversas del cutoff ϵ (o un término logarítmico en ϵ si la dimensión es cero).

Concentrémonos en el caso de interés de $d = 4$. Tenemos un término lineal que crece como L/ϵ asociado a la curva que resulta de la intersección de dos esferas, donde L es la longitud de esta curva, y un término proporcional a $\log(L/\epsilon)$ debido a la integral de la curvatura extrínseca de esta curva. Al vértice que resulta de la intersección de tres esferas debemos también asociar una divergencia. El argumento para descartar las contribuciones de estos defectos es que, o bien los coeficientes de los términos divergentes asociados son cero, o bien tienen signos opuestos las divergencias de los defectos que resultan de la intersección y la unión en el miembro derecho de (7.0.3). Veamos primero las divergencias L/ϵ , donde no tenemos contribución de la curvatura del defecto. En estos casos, la contribución es la misma para el mismo defecto sobre el plano nulo, en lugar de el cono nulo. El defecto no contribuirá porque no tenemos ninguna cantidad geométrica que dependa de los “ángulos”, de la cual la entropía pueda depender para distinguirlo del caso de no defecto. Esto es consecuencia de los argumento en la Sección 5.7 sobre las funcionales sobre el plano nulo, que son independiente de γ . Boosteando estas geometrías manteniendo el plano nulo fijo la podemos llevar a una geometría sin ángulo y si defecto. Para ser más explícitos, tomemos por ejemplo el caso

de un vértice en $d = 4$. El vértice tiene asociado tres líneas espaciales con vectores tangentes t_1 , t_2 y t_3 , cada uno de los cuales tiene su origen y extremo en un plano nulo. Todos pueden escribirse como combinaciones del vector nulo k paralelo al plano y vectores v_i espaciales y perpendicular a k , $t_i = v_i + \alpha_i k$, con $v_i^2 = 1$, $v_i \cdot k = 0$. En cualquier invariante formado por estos tres vectores, todas las contribuciones de las componentes de k se anulan, por lo que el invariante será el mismo que el formado por tres vectores en un mismo plano espacial de dimensión dos, que no es un vértice. Concluimos que estos términos no tienen una contribución adicional a la entropía. Para $d = 3$ y $d = 4$, mostramos en el Apéndice D que no hay contribuciones tipo $\log(\epsilon)$ o tipo $1/\epsilon$ respectivamente.

En dimensión $d = 4$ tenemos también la posibilidad de un término de curvatura sobre la intersección de dos esferas. Este término podría distinguir entre estar sumergido en un cono o un plano nulo. Al escribir esta contribución, está permitido que usemos el gradiente ∇_μ sobre el vector k por ejemplo, para producir invariantes locales. Sin embargo, estos gradientes viven solo sobre el defecto, por lo que los índices de las derivadas tienen que ser contraídos con la dirección a lo largo del defecto (que es una curva). El espacio ortogonal al defecto puede parametrizarse en un punto por el vector k nulo, y a lo largo de la dirección nula del cono, y dos vectores nulos q_i paralelo cada uno a cada una de las dos esferas cuya intersección forma el defecto, $q_i^2 = 0$, $q_i \cdot k = 1$. Existe la ambigüedad de tomar $k \rightarrow \lambda k$, $q_i \rightarrow (1/\lambda)q_i$, por lo que para producir un invariante en el integrando a lo largo del defecto tenemos que tomar combinaciones con el mismo número de vectores q_i y k . El único invariante no trivial con la dimensión correcta es

$$\int dx^\mu (\nabla_\mu k^\alpha) k^\beta q_1^\gamma q_2^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (7.1.2)$$

Esto requiere una elección de orden de los vectores q_1 , q_2 . Hecha esta elección, la orientación cambia de signo cuando calculamos esta contribución sobre la unión o sobre la intersección de dos esferas, por lo que la contribución total de este defecto $\log \epsilon$ a la SSA se anula.

2) El argumento anterior muestra que la SSA aplicada a esferas sobre el cono nulo está libre de divergencias UV en una CFT. Si agregamos una deformación relevante, otros términos divergentes pueden aparecer, con potencias distintas del cutoff ϵ , y donde algunas potencias del cutoff son reemplazadas por potencias de la constante de acoplamiento. Sin embargo, el punto importante es que estos términos son también locales sobre la superficie de entrelazado y tienen que tener la misma estructura geométrica que en el caso de la CFT, siendo integrales de invariantes geométricos sobre la superficie. El único cambio es que las potencias del cuoff se reemplazan por potencias de la constante de acoplamiento, por lo que en este caso también tendremos una desigualdad libre de divergencias UV.

7.2. Entropía de esferas irregulares y esferas suaves

Queremos convertir esferas irregulares en esferas en (7.0.3) o en (7.1.1). En el caso de $d = 4$, un remplazo de la entropía de la esfera irregular por la regular violaría la propiedad de Markov. Veamos esto en detalle. Para una CFT en dimensión $d = 4$ la entropía de una esfera tiene la forma (7.0.6), y si intentamos sustituir esta en la igualdad de Markov,

$$S(\sqrt{rR}) = \int_r^R dl \beta(l) S(l), \quad (7.2.1)$$

asumiendo que se puede tomar la entropía de las esferas irregulares como regulares, encontramos que la igualdad no se satisface. El término de área se cancela, pues

$$(\sqrt{rR})^{d-2} = \int_r^R dl \beta(l) l^{d-2}, \quad (7.2.2)$$

así como el término $\log(\epsilon)$. Sin embargo, este no es el caso para el término $-4A \log(l)$.

El problema es que hay una contribución no trivial a la entropía de una esfera irregular a causa del término finito $\int d^2\Omega (\nabla_\Omega \gamma / \gamma)^2$ en (6.2.33), que no se anula en el límite de N grande, porque depende de la pendiente de la irregularidad, que permanece distinta de cero y no cambia con N (para N grande). En el caso de una esfera a tiempo constante este término es cero, $\gamma = \text{constante}$, y no contribuye en el miembro derecho de (7.2.1). Esto invalida el remplazo de esferas irregulares por esferas. Veremos que teniendo en cuenta esta diferencia, se recupera la Markovianidad.

Con $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y θ el ángulo polar usual, la ecuación de una esfera boosteada de radio \sqrt{rR} es

$$t = l = \frac{2rR}{r + R - (R - r) \cos(\theta)}. \quad (7.2.3)$$

Tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{(\nabla_\Omega \gamma)^2}{\gamma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \partial_\theta l \right)^2 = \frac{(R - l)(l - r)}{2rR}. \quad (7.2.4)$$

Obtenemos un integrando constante (independiente de θ , excepto por órdenes superiores en $1/N$) sobre la superficie de la esfera irregular de radio aproximado l . Tomando en cuenta este término, la ecuación de Markov para los términos finitos queda

$$\log(\sqrt{rR}) = \int_r^R dl \beta(l) \left(\log(l) + \frac{(R - l)(l - r)}{2rR} \right). \quad (7.2.5)$$

Esta es una igualdad, al reemplazar la densidad $\beta = \frac{rR}{l^2(R - r)}$ en dimensión $d = 4$.

Es este término finito en $d = 4$ el que obstruye que podamos reemplazar las esferas irregulares por esferas. La idea es usar la propiedad Markoviana del vacío de la CFT

del punto fijo UV [42].

En la desigualdad (7.0.3) aplicada a las entropías de una teoría con escalas, sustraemos las entropías del punto fijo UV, que equivale a sustraer cero, dado que el vacío de la CFT UV es Markoviano para las regiones implicadas.

Además, los términos divergentes que resultan de deformaciones masivas son también Markovianos y se cancelan en la SSA, por lo que podemos sustraerlos también. De hecho, aún en el caso en que no estemos sobre el cono o el plano nulo, y la intersección y unión de regiones en la SSA sean superficies suaves, todos los términos divergentes de estas entropías son Markovianos, dado que la Markovianidad se sigue simplemente de la dependencia local y extensiva sobre la superficie de entrelazado. El contenido de la propiedad de Markov sobre la entropía es entonces sobre los términos finitos. En general, los términos finitos (o el coeficiente del término logarítmico) de regiones arbitrarias (no necesariamente con borde sobre un plano o un cono nulo) son no locales, y por ello, en general, no Markovianos. Para las regiones con borde sobre el plano o el cono nulo, y como se vió en el Capítulo anterior, estos términos son integrales sobre la superficie de entrelazado y son Markovianos.

Podemos mantener la desigualdad si reemplazamos

$$S(l) \rightarrow \Delta S(l) = S(l) - S_0(l) - \text{términos divergentes masivos}, \quad (7.2.6)$$

en (7.1.1), donde S_0 son las entropías del vacío de la CFT en el punto fijo UV.

Ahora, el término finito en la entropía de las esferas irregulares de la teoría con escala se cancela con el de la entropía de la esfera irregular de la teoría en el UV. Podemos reemplazar entonces la diferencia de la entropía de esferas irregulares por la diferencia de la entropía de esferas suaves, en el límite de N grande. Obtenemos la desigualdad

$$\Delta S(\sqrt{rR}) \geq \int_r^R dl \beta(l) \Delta S(l). \quad (7.2.7)$$

Tenemos que chequear que no hay términos finitos inducidos por el parámetro de masa que den una contribución a las esferas irregulares y que sobrevive en el límite de N grande, y que no esté presente en la entropía de la esfera suave. De hecho, la diferencia en la EE de una esfera irregular y una suave viene dada por el comportamiento UV en el límite de N grande. Estos términos deben ser proporcionales a alguna escala dada por el cuadrado de la constante de acoplamiento g^2 de la teoría deformada en el punto fijo UV, compensados por potencias de r y potencias positivas de la amplitud de la irregularidad. En consecuencia, no contribuyen en el límite de N grande. Solo importan los términos no locales en la entropía de la teoría con escala, pues los locales (divergentes), son Markovianos. Para los términos no locales, la diferencia entre la entropía de una esfera irregular y una suave está suprimida por potencias de la amplitud de la irregularidad, y

se hace cero en el límite de N grande. Para ver esto más claramente, analicemos el siguiente ejemplo holográfico. Notemos, antes de pasar a esto, que para el caso de $d = 3$, la fórmula (6.2.30) no nos da ninguna contribución extra para las irregularidades, y podemos reemplazar simplemente círculos ondulados por círculos suaves sin tener que sustraer las entropías de la CFT UV.

7.2.1. EE para esferas irregulares en flujos del GR holográficos

Para concretar la idea de que la diferencia entre la EE de una esfera de radio R y una esfera irregular de radio aproximado R viene de una contribución UV en el límite de $N \rightarrow \infty$ ondulaciones, haremos el siguiente cálculo holográfico en $d = 4$. Como se ha discutido anteriormente usamos la fórmula RT en la que la EE de una región viene dada por el área mínima en la geometría del bulk. En el caso de una CFT, esta geometría es la métrica de AdS, y en el caso de una QFT con escala, la geometría viene dada por una perturbación de esta métrica de AdS.

Calcularemos holográficamente términos inducidos en la EE por un parámetro de masa en la diferencia entre la EE de una esfera de radio R y una esfera irregular alrededor del mismo radio. Trabajamos en $d = 4$. Como modelo de la esfera irregular consideramos

$$\gamma^{-1} = R^{-1} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{2}} (Y_{lm}(\Omega) + Y_{lm}^*(\Omega)) \right). \quad (7.2.8)$$

Estamos interesados en el límite de ondulaciones de altura a muy pequeña, $l \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$. Tomaremos la altura de la ondulación del orden de su ancho, $a \sim l^{-1}$. El resultado es independiente de m . Tomamos $m = 0$.

La solución para la superficie extrema en la CFT UV viene dada por (6.2.18)

$$(\tilde{r}(\theta, \Omega))^{-1} = R^{-1} \left(1 + a Y_{l0}(\Omega) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(3+l)}{2^{2+l} \Gamma(\frac{3+2l}{2})} (\cos \theta)^l {}_2F_1\left(\frac{l-1}{2}, \frac{l}{2}, \frac{3}{2} + l, \cos^2 \theta\right) \right). \quad (7.2.9)$$

La función de l y θ que multiplica a aY_{l0} tiene valor 1 para $\theta = 0$ y decae exponencialmente rápido con l grande para $\theta = 0$. Esta supresión exponencial no ocurre para $\theta \lesssim l^{-1}$. Esto significa que la deformación que provocan las ondulaciones sobre la superficie mínima decaen exponencialmente rápido hacia el interior de AdS, y, para un ancho pequeño de la ondulación, son solo importantes cerca del borde de AdS. O sea, su contribución está dominada (excepto por términos exponencialmente pequeños en el inverso del tamaño de la ondulación) por el punto fijo UV. Por ello, para el cálculo holográfico basta usar una métrica de AdS perturbada para determinar el efecto de una deformación de masa sobre la EE de la esfera irregular.

Cerca del borde de AdS la métrica de AdS deformada, a primer orden, es

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dz^2(1 - g^2 z^{2\alpha})}{z^2}, \quad (7.2.10)$$

donde g es proporcional a la constante de acoplamiento y $\alpha = d - \Delta$, con Δ la dimensión de escala del operador que produce el flujo del GR. En términos de las coordenadas \tilde{r}, θ , el cambio en la métrica es

$$\delta ds^2 = -g^2 (\tilde{r} \sin(\theta))^{2\alpha-2} \left(\frac{d\tilde{r}^-}{2} \sin(\theta) + \frac{d\tilde{r}^+}{2} \sin(\theta) + \tilde{r} \cos(\theta) d\theta \right)^2. \quad (7.2.11)$$

La variación del área debido a la variación de la métrica es

$$\delta \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int d\Omega d\theta \sqrt{h} g^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu}, \quad (7.2.12)$$

donde $h_{\mu\nu}$ es la métrica inducida en la superficie, calculada sobre la superficie no perturbada.

Se obtiene entonces para la diferencia de las EE entre la esfera y la esfera irregular, a primer orden en g^2 ,

$$\Delta \mathcal{A} = \delta \mathcal{A}_{\text{ondulada}} - \delta \mathcal{A}_{\text{suave}} = -\frac{g^2}{2} \int d\Omega d\theta \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^{2\alpha-3} \Delta(\tilde{r})^{2\alpha}. \quad (7.2.13)$$

El factor de $\Delta(\tilde{r})^{2\alpha}$ decae exponencialmente hacia el bulk, haciendo válida la expansión perturbativa en la deformación de la métrica. Usando (7.2.9), y expandiendo en el tamaño de la ondulación hasta segundo orden, (para obtener una integral angular no trivial), obtenemos

$$\Delta \mathcal{A} = \alpha (\alpha - 1) a^2 g^2 R^{2\alpha} \times \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(\theta)^{4+2l} \sin(\theta)^{2\alpha-3} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(3+l)}{2^{2+l} \Gamma(\frac{3+2l}{2})} {}_2F_1\left(\frac{l-1}{2}, \frac{l}{2}, \frac{3}{2} + l, \cos^2 \theta\right) \right)^2. \quad (7.2.14)$$

El integrando es proporcional a $\theta^{2\alpha-3}$ para θ pequeña. La integral diverge para $\Delta \geq 3$, que está en el límite $\Delta \geq (d+2)/2$ en el que una deformación masiva provoca una corrección infinita en el término de área de la EE en $d=4$. Esta divergencia da lugar a términos nuevos locales, y por ello Markovianos, y pueden sustraerse en la SSA. Para $\Delta < 3$, obtenemos una integral finita con el siguiente comportamiento para l grande

$$\Delta \mathcal{A} \sim a^2 l^{-2(3-\Delta)} g^2 R^{2\alpha} \quad \Delta < 3. \quad (7.2.15)$$

Esto claramente se anula en el límite de altura a y ancho l^{-1} pequeños de las ondulaciones. Para $4 > \Delta > 3$ tenemos, una vez sustraídas las divergencias en $\theta \rightarrow 0$, el mismo

resultado (7.2.15). Como estamos tomando el límite de pequeñas ondulaciones pero con pendiente fija, $a \sim l^{-1}$, este término también se anula en el límite de ondulación pequeñas. Estos términos representan el cambio en el término no local (7.3.3) debido a las ondulaciones.

7.3. Teoremas de irreversibilidad

Tenemos entonces la desigualdad (7.2.7) para esferas en dimensión d , en donde las entropías de la CFT UV, así como posibles contribuciones divergentes, de la perturbación masiva al punto fijo, se han sustraído. Tomando el límite $R \rightarrow r$ tenemos:

$$r \Delta S''(r) - (d-3) \Delta S'(r) \leq 0. \quad (7.3.1)$$

Escribiendo la entropía en función del área a , en lugar del radio, obtenemos la expresión compacta

$$\Delta S''(a) \leq 0, \quad (7.3.2)$$

válida en cualquier dimensión. La entropía ΔS de una esfera debe ser cóncava como función del área.

Con nuestra definición de ΔS , que sustrae la entropía de la CFT UV y otras posibles divergencias, en el límite UV de r pequeño, todos los términos locales se anulan y queda el término principal no local

$$\Delta S_{UV}(r) \equiv \Delta S(r \ll m^{-1}) \sim c_0 g^2 r^{2(d-\Delta)} + \dots = c_0 g^2 a^{\frac{2(d-\Delta)}{d-2}} + \dots, \quad (7.3.3)$$

donde ... son términos de potencias superiores en r . En el IR, o a r más grande que la escala de masa, todas las contribuciones son locales (excepto los términos universales) y proporcionales a integrales de curvaturas sobre la superficie

$$\begin{aligned} \Delta S_{IR}(r) &\equiv \Delta S(r \gg m^{-1}) \\ &= \Delta \mu_{d-2} r^{d-2} + \Delta \mu_{d-4} r^{d-4} + \dots + \begin{cases} (-)^{\frac{d-2}{2}} 4 \Delta A \log(mr) & d \text{ par} \\ (-)^{\frac{d-1}{2}} \Delta F & d \text{ impar} \end{cases} \\ &= \Delta \mu_{d-2} a + \Delta \mu_{d-4} a^{\frac{d-4}{d-2}} + \dots + \begin{cases} \frac{(-)^{\frac{d-2}{2}} 4}{(d-2)} \Delta A \log(m^{d-2}a) & d \text{ par} \\ (-)^{\frac{d-1}{2}} \Delta F & d \text{ impar} \end{cases}. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Los coeficientes $\Delta \mu_{d-k}$ tienen dimensión $d-k$ y tienen la interpretación de renormalizaciones finitas de los coeficientes r^{d-k} entre los puntos fijos UV e IR. El último término nos da el cambio en la parte universal de la EE: $\Delta A = A_{IR} - A_{UV}$, con A el coeficiente de Euler en la anomalía de traza en dimensión par, y $\Delta F = F_{IR} - F_{UV}$, con F el término constante en la energía libre de la CFT en una esfera Euclídea de d

dimensiones.

Esta expansión IR resulta del siguiente razonamiento. La contribución de los grados de libertad masivos es de corto alcance en comparación con los grados de libertad que conforman la CFT IR. Por ello, cuando el radio de la esfera r es mucho mayor que la escala de masa de la teoría, el aporte al entrelazado de los grados de libertad masivos será local y extensivo sobre la superficie de entrelazado. En este límite de $r \gg m^{-1}$ la EE de la teoría masiva toma la forma

$$S(r \gg m^{-1}) = \mu_{d-2}^{IR} r^{d-2} + \dots + (-1)^{\frac{d-2}{2}} 4A_{IR} \log(rm) - (-1)^{\frac{d-2}{2}} 4A_{UV} \log(\epsilon m) + \text{cte} , \quad (7.3.5)$$

en dimensión par, y la forma

$$S(r \gg m^{-1}) = \mu_{d-2}^{IR} r^{d-2} + \dots + (-1)^{\frac{d-1}{2}} F_{IR} , \quad (7.3.6)$$

en dimensión impar. En dimensión impar no tenemos término logarítmico, y el término constante F es universal. Como se discutió hacia el final de la Sección 3.4.2, cuando $r \gg m^{-1}$, este término constante es F_{IR} , perteneciente a la teoría CFT IR [50]. En dimensión par el término universal es el coeficiente del logaritmo. En este caso, la dependencia finita con $\log r$ resulta del entrelazado de distancia grande $r \gg m^{-1}$, y debe estar controlada por la carga central IR, A_{IR} . En cambio, por ser la dependencia $\log \epsilon$ divergente UV, debe provenir del entrelazado de corta distancia, y estar controlada por el comportamiento de la teoría en el UV, con lo cual el coeficiente de $\log \epsilon$ es A_{UV} . Al restar (7.3.5) y (7.3.6) con la entropía del punto fijo UV

$$S_{UV}(r) = \mu_{d-2}^{UV} + \dots + \begin{cases} (-1)^{\frac{d-2}{2}} 4 A_{UV} \log(r/\epsilon) & d \text{ par} \\ (-1)^{\frac{d-1}{2}} F_{UV} & d \text{ impar} \end{cases} , \quad (7.3.7)$$

obtenemos (7.3.4).

De la concavidad de (7.3.2), obtenemos que la función $\Delta S'(a)$ es monótona decreciente, o sea, que la pendiente de $\Delta S(a)$ en el UV debe ser mayor que la pendiente de $\Delta S(a)$ en el IR. De (7.3.4), vemos que la pendiente en el IR es

$$\Delta S'_{IR}(a) = \Delta S'(a \gg m^{2-d}) = \Delta \mu_{d-2} . \quad (7.3.8)$$

Esta debe ser menor que

$$\Delta S'_{UV}(a) = \Delta S'(a \ll m^{2-d}) = c_0 g^2 \frac{2(d-\Delta)}{d-2} a^{\frac{d+2-2\Delta}{d-2}} , \quad (7.3.9)$$

donde se tuvo en cuenta (7.3.3). Cuando $\Delta \leq \frac{d+2}{2}$, $\Delta S'_{UV}(a)$ es finita (e igual a cero),

con lo cual

$$\Delta\mu_{d-2} \leq 0. \quad (7.3.10)$$

Este es el Teorema del Área demostrado en el Capítulo 4 usando la entropía relativa [32]: el coeficiente del término de área decrece a lo largo del flujo del GR.

Si $\Delta > (d+2)/2$, el término de área en el UV puede considerarse infinito pues la pendiente de (7.3.3) diverge cuando $a \rightarrow 0$. En este caso la renormalización del término de área es infinita, (aunque negativa), debido al comportamiento de $\Delta S(a)$ en el UV.

En $d = 2$ el coeficiente del “área” (término logarítmico) es adimensional y (7.3.10) coincide con el Teorema c. O sea, el “área” en $d = 2$ es $a = \log r$ y

$$\Delta S'_{IR}(a) = \Delta S'(a \gg m^{2-d}) = \frac{\Delta c}{3} \leq \Delta S'_{UV}(a) = \Delta S'(a \ll m^{2-d}) = 0, \quad (7.3.11)$$

de donde se obtiene que $\Delta c = c_{IR} - c_{UV} \leq 0$. En la última igualdad a cero se tuvo en cuenta que en $d = 2$, siempre se satisface que $\Delta \leq (d+2)/2 = 2 = d$, pues es todo el rango de un operador relevante.

En $d = 3$ debemos hacer el siguiente análisis para obtener el Teorema F. De (7.3.3) vemos que $\Delta S(0) = 0$, lo cual, junto con la concavidad de $\Delta S(a)$, implica que la altura n , en donde la tangente $y = mx + n$ de $\Delta S(a)$ en a , corta el eje vertical, es siempre positiva: $n \geq 0$. En el IR, de (7.3.4), tenemos que

$$\Delta S_{IR}^{d=3}(a) = \Delta\mu_{d-2}a - \Delta F. \quad (7.3.12)$$

En este caso vemos que $n = -\Delta F = F_{UV} - F_{IR} \geq 0$, que es el Teorema F.

En $d = 4$ el Teorema A se sigue del análisis IR de la desigualdad $\Delta S''(a) \leq 0$. En el IR se tiene en $d = 4$ que

$$\Delta S_{IR}^{d=4}(a) = \Delta\mu_{d-2}a - 2\Delta A \log(m^2a), \quad (7.3.13)$$

con lo cual

$$\frac{1}{4}a^2 \Delta S_{IR}''(a) = \Delta A = A_{IR} - A_{UV} \leq 0, \quad (7.3.14)$$

que es el Teorema A, el resultado principal de esta Tesis.

Para dimensiones $d > 4$ podemos hacer un análisis similar. En el IR ($d > 4$) se tiene que

$$\Delta S_{IR}''(a) = \Delta\mu_{d-4} \left(\frac{d-4}{d-2} \right) \left(\frac{d-4}{d-2} - 1 \right) a^{\frac{d-4}{d-2}-2} \leq 0. \quad (7.3.15)$$

de lo cual obtenemos que

$$\Delta\mu_{d-4} \geq 0. \quad (7.3.16)$$

La desigualdad no restringe el signo de los términos sub-dominantes, en particular, los

términos universales para $d > 4$. Sin embargo, para $d > 4$, nos da un signo para la renormalización del término subdominante $\Delta\mu_{d-4}$: el coeficiente del término subdominante al término de área, $\Delta\mu_{d-4}$, crece entre los extremos del flujo del GR.

Además de estas desigualdades que surgen de comparar las expansiones UV e IR de la entropía de una esfera, debemos chequear (7.3.2) en las expansiones UV e IR mismas. En el IR obtenemos nuevamente (7.3.14) y (7.3.16) para $d \geq 4$. Para $d = 3$ obtenemos información sobre el signo de la primera corrección sub-dominante al término constante

$$\Delta S_{IR}^{d=3} = \Delta\mu_1 r - \Delta F - \frac{k}{r^\alpha} + \dots, \quad (7.3.17)$$

donde el último término es de origen puramente IR y α está relacionada con la dimensión principal irrelevante en el IR [50]. Obtenemos $k > 0$ de (7.3.2). Esto coincide con el cálculo holográfico en [142], y cálculos para campos libres [212].

En el UV obtenemos que el signo del coeficiente c_0 en (7.3.3) es el mismo que el de $\Delta - (d+2)/2$. Esto también está de acuerdo con los cálculos holográficos de [50].

Notemos que mientras la desigualdad (7.3.2) se satura en el UV, esta no se satura en el IR para $d \geq 4$. La SSA siempre satura en el IR para regiones suficientemente suaves (con curvaturas del orden del tamaño), pero este no es el caso de las esferas irregulares.

Algo interesante a notar, es que con la desigualdad (7.3.2) podemos construir una función interpolante en dimensión $d = 2$ y $d = 3$, con la propiedad de que en los puntos fijos iguala a las cargas centrales correspondientes, como se vió en el Capítulo 3. Evidentemente $\Delta S''(a) \leq 0$ es la derivada de alguna función en $d = 4$. Esta es

$$A(r) = r\Delta S'(r) - 2\Delta S(r). \quad (7.3.18)$$

Sin embargo, en el IR, esta $A(r)$ se comporta como

$$A(r \gg m^{-1}) \approx 8(A_{IR} - A_{UV}) \log(mr), \quad (7.3.19)$$

y no converge a un valor finito para r grande. O sea, $A(r)$ no interpola entre las cargas centrales de los puntos fijos. Esto nos obliga a solo poder acceder a la versión débil del Teorema A, con las propiedades estudiadas de la entropía. Es interesante notar que para acceder al Teorema A en dimensión $d = 4$, no basta con aplicar las SSA a un estado genérico (en este caso el vacío de una teoría con escala), sino que necesitamos además conocer los estados y regiones para los cuales la SSA satura.

Los teoremas de irreversibilidad en dimensiones dos, tres y cuatro quedan unificados en el enunciado de que la diferencia de entropías del vacío (7.3.2) de una esfera es cóncava como función de su área.

En la Sección 4.2 vimos que para un flujo del GR no trivial, en el que $T^\mu_\mu = \Theta \neq 0$,

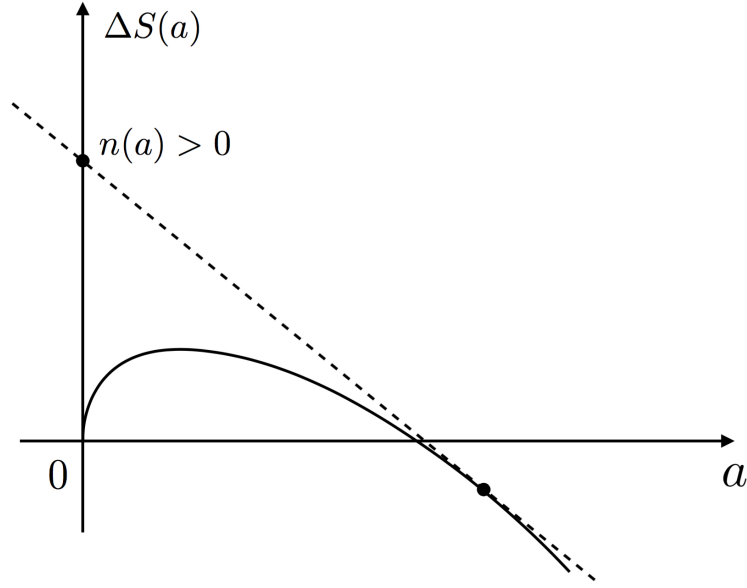


Figura 7.2: De la concavidad de $\Delta S(a)$ ($\Delta S''(a) < 0$) se obtiene que la pendiente $\Delta\mu_{d-2}$ en el IR es menor que en el UV, y que la recta tangente a $\Delta S(a)$ en a corta el eje vertical en la coordenada positiva $n(a) = \Delta S(a) - a\Delta S'(a) > 0$, dado que $\Delta S(0) = 0$. En $d = 4$, $n(a) = -2\Delta A \log(m^2 a) + \Delta\mu_0 + 2\Delta A > 0$, y no podemos asegurar que $\Delta A \neq 0$ si $\Delta S''(a) < 0$, pues puede ocurrir que el término constante no universal $\Delta\mu_0 \neq 0$.

necesariamente tiene que cambiar el término de área, y que en $d = 2$ la carga central c , y en $d = 3$ el término constante F , no pueden permanecer constantes (tienen que disminuir en una cantidad finita). Nos preguntamos si lo mismo tiene que ocurrir en $d = 4$: Si un flujo no trivial del GR implica un cambio en el coeficiente A del término logarítmico. Con la información disponible no podemos asegurar que este sea el caso. Cuando un flujo es no trivial ($\Theta \neq 0$) necesariamente cambia el término de área $\Delta\mu_{d-2}$ pues

$$\Delta\mu_{d-2} \propto \int_0^\infty d^d x x^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle \neq 0. \quad (7.3.20)$$

Esto implica que $\Delta S''(a) < 0$, pues $\Delta\mu_{d-2} = \int_0^\infty da a \Delta S''(a) < 0$ (estrictamente). A partir de aquí podemos investigar la variación de los términos sub-dominantes en $\Delta S(a)$. De la concavidad de $\Delta S(a)$ y la condición $S(0) = 0$ se tiene que la recta tangente a $\Delta S(a)$ en a corta al eje $a = 0$ en la coordenada positiva $n(a) = \Delta S(a) - a\Delta S'(a) > 0$, ver Figura 7.2. En $d = 4$ tenemos el siguiente comportamiento para $\Delta S(a)$ en el IR

$$\Delta S(a) = \Delta\mu_2 a - 2\Delta A \log(m^2 a) + \Delta\mu_0, \quad (7.3.21)$$

donde $\Delta A = A_{IR} - A_{UV}$ y $\Delta\mu_0$ es la variación en el término constante no universal. De aquí obtenemos que

$$n(a) = \Delta S(a) - a\Delta S'(a) = -2\Delta A \log(m^2 a) + \Delta\mu_0 + 2\Delta A > 0. \quad (7.3.22)$$

Sin embargo, de que $n(a) > 0$ estrictamente (pues $\Delta S''(a) < 0$ estrictamente) no podemos concluir que $\Delta A \neq 0$, pues $n(a) > 0$ se puede satisfacer simplemente con una variación del término no universal constante $\Delta\mu_0$. En los casos en que $\Delta A \neq 0$, el término $-2\Delta A \log(m^2 a)$ domina en (7.3.22) y se obtiene que $\Delta A < 0$ (Teorema A).

Del comportamiento del término de área y del término sub-dominante, ante flujos del GR, se sugiere que los coeficientes $\Delta\mu_{d-2k}$ en el IR, cuando sean finitos (lo que ocurre cuando $\Delta < (d + 2k)/2$), renormalizan con signo $(-1)^k$. De hecho, el Teorema A equivale a que $\Delta\mu_{4-4} \geq 0$, el cual es finito en el rango $\Delta < (4 + 4)/2 = 4 = d$, que es todo el rango permitido. El signo $(-1)^k$ está de acuerdo con el signo en las cargas centrales en (7.3.3) y el orden en que estas se deben comportar ante el GR.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta Tesis hemos discutido aspectos generales sobre el grupo de renormalización en QFT usando la entropía de entrelazado. Específicamente, y como resultado principal, se demostró el Teorema *A* entrópico, y se dió un cuadro unificado con los otros teoremas de irreversibilidad del GR en dimensiones menores como una consecuencia de las propiedades de la entropía. Fue necesario para ello establecer la propiedad Markoviana del vacío. Con el objetivo de extraer información útil sobre los términos universales en la entropía, dados por las cargas centrales de las teorías en los puntos fijos, fue necesario aplicar la desigualdad de la subaditividad fuerte en conjunción con la invariancia de Lorentz y la causalidad. Esto determina el por qué del arreglo geométrico de esferas boosteads sobre el cono nulo, y en general, regiones espacio-temporales con borde sobre el cono nulo. La razón física de esto es precisamente la propiedad Markoviana, que tiene una larga lista de consecuencias: forma explícita de los Hamiltonianos modulares y de la entropía de entrelazado y de Rényi para regiones con borde sobre el plano o el cono nulo, estructura muy restringida de la matriz densidad del vacío, tipo producto, lo que está relacionado con que el vacío pueda reconstruirse a partir del conocimiento de sus reducciones a regiones menores, simetría infinita sobre el plano nulo, conformada por los Hamiltonianos modulares y generalizaciones tipo Virasoro a partir de esta, representación de la Markovianidad como una isometría que preserva las áreas de las superficies RT antes deformaciones sobre el cono nulo en el bulk, etc. Se obtuvo como consecuencia de todos estos ingredientes una desigualdad general dada por

$$\Delta S''(a) \leq 0 . \quad (8.0.1)$$

La diferencia de la entropía de esferas entre el vacío de la teoría con escala y el vacío de su punto fijo UV es cóncava con función de su área. De aquí se derivan los Teoremas *c*, *F* y *A* en dimensiones $d = 2, 3$ y 4 respectivamente, además de los teoremas de área, que fueron reobtenidos.

Los teoremas del área los establecimos inicialmente a través de dos enfoque muy

distintos: por un lado la relación de estos con la renormalización de la constante de Newton, y por otro lado como consecuencia del estudio de la entropía relativa entre los vacíos de la teoría que fluye y la del punto fijo UV, comparados sobre la superficie de Cauchy nula. En el primer enfoque, derivamos formalmente, con la integral funcional y con la ayuda de la representación espectral, la relación entre las partes universales en el término de área de la EE y la expresión en términos de la función de dos puntos de la traza del tensor de energía-momentos, fórmula de Adler-Zee para la renormalización de la constante de Newton. Se comprobó esta igualdad en el caso del fermión libre y para teorías y flujos del GR con dual holográfico. Para esto calculamos la función de dos puntos $\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle$ holográficamente. Imponiendo regularidad de la solución en el interior del bulk y a través de un proceso de pegado con la solución en el UV, obtuvimos esta función como una expansión en serie en momentos chicos, ecuación (4.5.39). Este resultado es general para potenciales generales escalares, con los coeficientes de la serie determinados por el factor de deformación de la métrica de fondo y sus derivadas. Mostramos que el término principal de p^2 nos da el cambio en la carga central en $d = 2$, mientras que para $d > 2$ reproduce la entropía de entrelazado de una superficie plana. Esto constituye la realización holográfica de la fórmula general propuesta entre las partes finitas del término de área en la EE y la renormalización de la constante de Newton (fórmula de Adler-Zee). Mostramos que la positividad de reflexión de la QFT en el borde de AdS requiere la estabilidad de la acción gravitatoria en el bulk y mostramos que la parte universal no se modifica al considerar otra regularización, dada por la aproximación a la EE con la información mutua, aún cuando puedan haber potencias fraccionarias de la escala de masa y el cutoff en estos flujos holográficos.

Desde el otro enfoque con la entropía relativa, se obtuvo una demostración alternativa del Teorema *c* (que es el teorema del área en $d = 2$), y el decrecimiento del término de área en la EE como consecuencia de la positividad de la entropía relativa entre los vacíos UV y de la teoría que implementa el flujo del GR. Un elemento importante en esta prueba es que para evitar que la entropía relativa distinga mucho estos dos estados, nos vimos obligados a comparar estos sobre la superficie de Cauchy nula. Aquí tenemos otra indicación general de que es necesario usar la invariancia de Lorentz y lo más extremo de la geometría de Minkowsky, la superficie nula, para poder extraer información útil para el GR a partir de desigualdades de la entropía. Esta demostración tiene la interpretación de que, en $d = 2$, es la diferencia de las cargas centrales la que controla la distinguibilidad de los vacíos, y por ello tiene que ser positiva. En dimensión d esta entropía relativa sobre la superficie nula solo es finita si $\Delta < (d + 2)/2$. En estos casos, la renormalización del término de área es finita. En relación con el anterior enfoque, esto puede interpretarse como un incremento en la constante de Newton hacia el IR, dada por la contribución de los campos cuánticos.

En la búsqueda de una generalización de los métodos con la entropía en dimensio-

nes inferiores para lograr una demostración del Teorema A, se descubrió la propiedad Markoviana del vacío. Esta se demostró en detalle y a través de varios métodos. Se obtuvo, con un análisis de OPE en el límite nulo de operadores de twist y mediante la aplicación de los teoremas de semi-inclusión modular, la forma explícita de los Hamiltonianos modulares de regiones con borde sobre el plano nulo para el vacío de cualquier QFT, y en el caso de las CFTs, para regiones con borde sobre el cono nulo. Esto demostró la propiedad Markoviana, que equivale a la igualdad

$$H_A + H_B = H_{A \cup B} + H_{A \cap B} . \quad (8.0.2)$$

Esta igualdad se satisface por el hecho de que la expresión general de H_X es, sobre la superficie nula, como el resultado de Rindler rayo a rayo nulo, y la cancelación en (8.0.2) ocurre rayo a rayo nulo. Se obtuvo (8.0.2) además de consideraciones generales algebraicas, sin pasar por la forma explícita de H_X . Como un resultado adicional de este cálculo de los Hamiltonianos modulares hemos encontrado que el álgebra infinito dimensional que implementa las simetrías que preserva la Markovianidad puede ser extendida a un álgebra mayor de tipo Virasoro. Esta tiene carga central divergente UV y sus elementos no están dados por cargas que resultan de corrientes conservadas. Sería muy interesante saber si esta álgebra tienen alguna implicación sobre la estructura de las CFT en dimensiones mayores, y si las cargas centrales se pueden renormalizar o definir en alguna situación útil. El álgebra infinita de los Hamiltonianos modulares parece tener conexión con el grupo infinito de simetrías asintóticas del espacio-tiempo que han sido discutidas en la literatura. Sería interesante establecer una conexión entre estas simetrías y los flujos modulares.

Hemos visto que la propiedad Markoviana de la EE del vacío reducido a regiones con borde sobre el plano o el cono nulo tiene un origen esencialmente geométrico. Debido a eso, esta propiedad se extiende a otras cantidades, como las entropías de Rényi. La propiedad Markoviana, en conjunción con la invariancia de Lorentz, determina la forma general de las entropías sobre el cono nulo para el vacío de una CFT, y resulta estar relacionada con la acción efectiva de un campo dilatón en dos dimensiones menos. El coeficiente del término universal viene totalmente determinado por el coeficiente de Euler en la anomalía de traza de la CFT en dimensión par y resulta de un término de Wess-Zumino anómalo en la acción del dilatón. En dimensiones impares la parte universal es solo una constante F , para cualquier región con borde en el cono nulo.

Es curioso que hayamos encontrado que la forma que tienen las entropías de regiones con borde sobre el cono nulo vengan clasificadas por las acciones efectivas para un campo dilatón, que son fundamentales en la prueba de Komargodski y Schwimmer del Teorema A [46]. Sin embargo, en el presente caso, el dilatón vive en $d - 2$ dimensiones, en lugar de vivir en d dimensiones. Esta conexión fue también notada por Solodukhin

en [193]. Otra diferencia es que nuestro dilatón no dinámico no necesariamente obedece el requisito de unitariedad (positividad de reflexión). Sería muy interesante investigar si esta conexión, o un método mixto de dilatón y entropía, puede ser la base para extender las pruebas de los teoremas de irreversibilidad a dimensiones mayores que cuatro.

Además de los casos que son transformaciones conformes del plano nulo en el espacio de Minkowski en una CFT, esperamos que la propiedad Markoviana valga en cualquier QFT en un espacio con una bifurcación de sus vectores de Killing, y para estados que sean invariantes ante la simetría generada por estos Killing. Esto es porque esta simetría comprimiría las regiones sobre el horizonte de bifurcación de Killing manteniendo invariante un cutoff covariante y dando como resultado entropías (funcionales) con el mismo valor. Esto incluye por ejemplo, QFTs en espacios de Sitter para el estado invariante ante las simetrías de este espacio y para regiones sobre el horizonte cosmológico, o para el estado de Hartle-Hawking y regiones sobre el horizonte de un agujero negro estacionario.

Hemos chequeado que las expresiones generales para la entropía de una región con borde en el cono nulo valen holográficamente. Es interesante que una expresión holográfica exacta pueda ser encontrada para esta extensa clase de regiones, aunque podemos entender el principio de las simplificaciones que hicieron posible el resultado a partir de consideraciones generales. Hemos demostrado cómo las simplificaciones también se aplican a las correcciones en λ^{-1} (de cuerdas) y en N^{-1} (cuánticas). Holográficamente, la razón de estas simplificaciones es que la superficie de RT yace sobre un cono nulo en el bulk.

Sería interesante obtener la forma explícita para las entropías de Rényi sobre el cono de un cálculo directo de las entropías de Rényi holográficas. En este caso tendríamos que lidiar con una representación complicada de Schwinger-Keldysh con un defecto cónico Lorentziano en el bulk [89], pues no podemos usar la representación Euclídea de la integral funcional que nos da la matriz densidad reducida [88, 213] para regiones genéricas sobre el cono nulo.

La propiedad Markoviana para las entropías de Rényi restringe más aún la forma de la matriz densidad del vacío, que ya estaba restringida por ser Markoviano. Para sistemas finitos esta es la de un estado tipo producto de la forma $\rho_{ABC} = \rho_{AB_L} \otimes \rho_{B_R C}$, con B_L y B_R dos subsistemas que particionan la intersección B . No es exactamente un estado producto porque la partición del espacio B depende de los espacios A y C , aunque este espacio B puedo hacerlo tan pequeño como quiera, por lo que, a groso modo, el vacío es un estado producto en la dirección transversal. Como se mencionó en el Capítulo 5, decir que el vacío es un estado producto en la dirección transversal (que es más que decir que es de la forma $\rho_{ABC} = \rho_{AB_L} \otimes \rho_{B_R C}$), no es matemáticamente correcto para teorías con punto fijo UV interactuante, ya que las álgebras correspondientes a

los espacios A y C estarían vacías, pues estas regiones son nulas, y no puedo suavizar ningún operador de campo de una teoría interactuante con funciones de prueba con soporte solo en la superficie nula. El vacío sí es un estado producto en la dirección transversal en los casos en que las subálgebras de operadores se puedan definir sobre la superficie nula, como es el caso de campos libres [80].

En el caso de $d = 4$ no basta aplicar la SSA, es necesario además conocer dónde satura. La importancia de la propiedad Markoviana aplicada al GR no está en cancelar las divergencias UV de los defectos de las esferas irregulares, dado que estas divergencias se cancelan, o bien por si mismas, debido a la geometría particular del cono nulo, o bien se anulan en la combinancia de la SSA. La importancia de la propiedad Markoviana está en el hecho de que en dimensión $d \geq 4$ existe una contribución finita de los defectos que no se anula en el límite en el que el tamaño del defecto tiende a cero, pues depende de la pendiente del defecto. Esta contribución finita remanente es sin embargo UV en el límite en que el tamaño del defecto tiende a cero, y es la misma que la producida por el vacío del punto fijo UV, que es Markoviano (con lo cual se puede restar en la SSA sin ningún costo). En la resta, la contribución finita remanente del defecto se anula y podemos sustituir las diferencias de las entropías de esferas irregulares por la diferencia de las entropías de esferas suaves.

Es muy probable que para decir algo sobre el GR en $d \geq 5$ necesitemos una desigualdad (desconocida) más fuerte que la subaditividad fuerte, y que involucre a más de cuatro regiones, de forma que en el límite se obtenga una desigualdad sobre derivadas superiores de la entropía, y podamos acceder a la parte universal que es la que contiene las cargas centrales. Usando el método del truco del dilatón esto se ha intentado infructuosamente en dimensión $d = 6$ [196]. La impresión general es que a medida que aumentamos la dimensión, las desigualdades o las propiedades necesarias a invocar son cada vez más finas. Por otro lado, a medida que aumentamos la dimensión, las CFTs y los flujos que las conectan se hacen cada vez más escasos. Quizás la búsqueda deba realizarse sobre una desigualdad condicionada, aunque, debemos notar, que si la desigualdad involucra una combinación lineal de n entropías, esta debería ser Markoviana al aplicarse sobre múltiples regiones en el cono nulo y para el vacío de una CFT. Esperamos en el futuro obtener tal desigualdad.

Apéndice A

Densidad de esferas irregulares

En este apéndice calculamos la expresión para la densidad de esferas irregulares que resulta de aplicar la SSA repetidas veces sobre esferas boosteadas y uniformemente distribuidas sobre el ángulo sólido. El material presentado está basado en [41]. Si en la SSA

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B) + S(A \cap B) , \quad (\text{A.0.1})$$

tomamos los conjuntos A y B como esferas boosteadas del mismo radio sobre un cono nulo, resulta que su intersección y unión no son esferas. Para intentar contrarestar este problema, en la Sección 3.4.2 se mostró que debía usarse una versión de la SSA simetrizada

$$\sum_i S(X_i) \geq S(\cup_i X_i) + S(\cup_{\{ij\}} (X_i \cap X_j)) + S(\cup_{\{ijk\}} (X_i \cap X_j \cap X_k)) + \dots + S(\cap_i X_i) . \quad (\text{A.0.2})$$

Los conjuntos X_i se eligieron como copias idénticas de una esfera boosteada sobre el cono nulo y estas copias fueron distribuídas uniformemente sobre el ángulo sólido espacial. La forma geométrica de los conjuntos en el miembro derecho de (A.0.2) es algo similar a esferas con picos, o esferas irregulares, como muestra la Figura 3.7. Para ver esto tomemos el caso de $d = 3$ y el conjunto $\cup_{\{ijk\}} (X_i \cap X_j \cap X_k)$. Llamamos a $\cup_{\{ijk\}} (X_i \cap X_j \cap X_k)$ la esfera irregular de orden $k = 3$, pues este resulta de la unión de la intersección de $k = 3$ esferas de todas las N involucradas.

En el caso de $N = 8$ esferas en $d = 3$ (círculos), como se muestra en la Figura A.1, existen $\binom{8}{3} = 64$ términos en

$$\cup_{ijk} (X_i \cap X_j \cap X_k) = (X_1 \cap X_2 \cap X_3) \cup (X_1 \cap X_2 \cap X_4) \cup \dots \quad (\text{A.0.3})$$

Con ayuda de la Figura A.1 podemos notar lo siguiente. En (A.0.3), solo con la unión de la intersección de tres círculos consecutivos podemos obtener el conjunto $\cup_{ijk} (X_i \cap X_j \cap X_k)$. La intersección de círculos no consecutivos está incluida en alguna

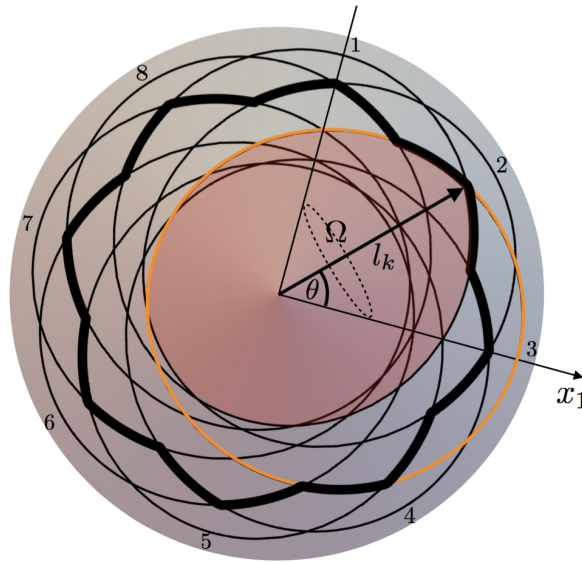


Figura A.1: Proyección espacial de 8 esferas uniformemente distribuidas en el ángulo sólido espacial. La intersección de las esferas $X_1 \cap X_2 \cap X_3$, máximamente empaquetadas en el ángulo sólido $\Omega(\theta)$ alrededor de X_2 , está resaltada en rojo. La esfera irregular de orden $k = 3$ está resaltada en negro.

de las intersecciones de círculos consecutivos. Por ejemplo, de la Figura A.1 podemos ver que la intersección de los círculos no consecutivos $X_1 \cap X_2 \cap X_4$ está incluida en la intersección de los círculos consecutivos $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ (resaltada en rojo en la Figura A.1). No se necesitan los $\binom{8}{3} = 64$ términos en (A.0.3) para producir el miembro izquierdo, basta con la unión de los 8 conjuntos que son la intersección de círculos consecutivos. En más dimensiones la situación es la misma. El miembro izquierdo de (A.0.3) puede obtenerse solo con la unión de la intersección de $k = 3$ esferas máximamente empaquetadas en el ángulo sólido en el cual entran solo $k = 3$ esferas de las N a disposición.

Esta observación es importante porque estamos interesados en calcular el radio l_k de la esfera irregular de orden k (aquella formada por la unión de la intersección de k esferas; el conjunto $\cup_{i_1 i_2 \dots i_k} (X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k})$ en (3.4.9)). El radio l_k puede calcularse solo atendiendo a la intersección de k esferas máximamente empaquetadas en el ángulo sólido en el que entran k esferas.

Sea R el radio aproximado de la esfera irregular formada por la unión de todas las N esferas en el límite en que N es grande, y r el radio aproximado de la esfera irregular formada por la intersección de las N esferas. De esta forma, la esfera irregular de orden $k = N$ es la más pequeña de todas y tiene radio r y la de orden $k = 1$ es la más grande y tiene radio R . Usamos las coordenadas de Minkowski $(t, x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$ en d dimensiones. El radio de la esfera X_i viene dado por \sqrt{rR} , como en $d = 2$. Si tomamos

una de la esferas X_i sobre el plano

$$t = x_1 \frac{(R-r)}{(R+r)} + \frac{2rR}{r+R}, \quad (\text{A.0.4})$$

y sobre el cono $t^2 = x_1^2 + \dots + x_{d-1}^2$, el centro de esta se encontrará en el punto

$$(t, x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) = \left(\frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, 0, \dots, 0 \right). \quad (\text{A.0.5})$$

La ecuación de la esfera es entonces

$$rR = - \left(t - \frac{R+r}{2} \right)^2 + \left(x_1 - \frac{R-r}{2} \right)^2 + x_{\perp}^2, \quad x_{\perp} = (x_2, \dots, x_{d-1}) \quad (\text{A.0.6})$$

suplementada por la ecuación del plano (A.0.4).

Los radios l_k de las esferas irregulares de (3.4.9) están dados por la distancia máxima espacial desde el origen hasta el borde del conjunto $\cup_{i_1 i_2 \dots i_k} (X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k})$, que tiene una forma similar a la resaltada en rojo en la Figura A.1.

Queremos obtener la densidad $\beta(l)$ de esferas irregulares de radio l en d dimensiones. Esto es, cuántas esferas irregulares de orden entre k y $k + dk$ entran entre los radios l y $l + dl$:

$$dk = N\beta(l)dl \quad (\text{A.0.7})$$

Con esta definición podemos escribir (3.4.9) cuando N es grande como

$$S(\sqrt{rR}) \geq \int_r^R dl \beta(l) \tilde{S}(l), \quad (\text{A.0.8})$$

donde $S(\sqrt{rR})$ es la EE de cada X_i (todas iguales) y $\tilde{S}(l)$ es la EE de las esferas irregulares de radio l .

Para hallar $\beta(l)$ tomemos una esfera arbitraria, por ejemplo, la esfera X_2 de la Figura A.1. Si hay N esferas uniformemente distribuídas, entonces entran

$$k = \frac{N}{\text{Vol}(S_{d-2})} \Omega(\theta) \quad (\text{A.0.9})$$

de ellas en el ángulo sólido $\Omega(\theta)$ alineado con X_2 y determinado por el ángulo polar θ cuya dirección zenit está alineada con la dirección en la que se boostea X_2 , ver Figura A.1. En (A.0.9)

$$\text{Vol}(S_{d-2}) = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \quad (\text{A.0.10})$$

es el área de la esfera unitaria sumergida en \mathbb{R}^{d-1} . Usando que $d\Omega = \text{Vol}(S_{d-3}) \sin^{d-3}(\theta) d\theta$,

obtenemos

$$dk = N \frac{\text{Vol}(S_{d-3})}{\text{Vol}(S_{d-2})} \sin^{d-3}(\theta) d\theta . \quad (\text{A.0.11})$$

Para hallar la relación entre l_k y θ nos concentramos en una de las esferas en el extremo del ángulo sólido $\Omega(\theta)$, por ejemplo, la esfera X_3 de la Figura A.1, resaltada en naranja. De las ecuaciones (A.0.6) y (A.0.4), con la coordenada x_1 alineada con el eje más grande del elipsoide X_3 (proyección espacial de una esfera boosteada), y la relación

$$|x_\perp| = |x_1| \tan(\theta) , \quad (\text{A.0.12})$$

obtenemos

$$l = \sqrt{x_1^2 + x_\perp^2} = \frac{2rR}{R + r - (R - r) \cos(\theta)} . \quad (\text{A.0.13})$$

De (A.0.11) y (A.0.13) obtenemos finalmente

$$\beta(l) = \frac{\text{Vol}(S_{d-3})}{\text{Vol}(S_{d-2})} \frac{2^{d-3} (rR)^{\frac{d-2}{2}} ((l-r)(R-l))^{\frac{d-4}{2}}}{l^{d-2} (R-r)^{d-3}} . \quad (\text{A.0.14})$$

Apéndice B

Ejemplo: Campo escalar libre de masa m y de masa cero

En este apéndice calculamos $\Delta\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_\Sigma$ para el caso del flujo del GR que resulta de perturbar el campo escalar de masa cero con un término de masa, y para la superficie de Cauchy espacial $x^0 = 0$. El punto fijo UV es simplemente el campo escalar no masivo, y el término relevante de masa inicia un flujo del GR que termina en una teoría trivial, de correladores iguales a cero. Consideramos la situación más general en donde \mathcal{T}_0 es la teoría del campo escalar libre de masa m_0 , y \mathcal{T}_1 la teoría de un campo escalar libre de masa m_1 . Calcularemos la variación $\Delta\langle T_{\mu\nu}\rangle$ entre estas teorías, con $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momentos de \mathcal{T}_0 .

Recordemos que para el campo escalar masivo,

$$S = \int d^d x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 \right), \quad (\text{B.0.1})$$

tenemos un tensor de energía-momentos dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\partial\phi)^2 - m_0^2 \phi^2) - \xi_c (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial^2) \phi^2, \quad \xi_c = \frac{d-2}{4(d-1)}. \quad (\text{B.0.2})$$

El último término es un término de improving, que hemos introducido para que $T_{\mu\nu}$ tenga traza cero en el límite de masa cero.

Calcularemos $\Delta\langle T_{\mu\nu}\rangle$ con la regularización de separación puntos coincidentes

$$\phi^2(x) \rightarrow \phi(x - \epsilon) \phi(x + \epsilon)$$

en la superficie de Cauchy $x^0 = 0$. Para esto, usamos el propagador del campo escalar

libre de Minkowski en d dimensiones,

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{m}{|x-y|} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(m|x-y|), \quad (\text{B.0.3})$$

donde la distancia $|x-y| = \sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^2 - (x_0-y_0)^2}$. La componente T_{00} para el escalar libre de masa m_0 , con la regularización de separación de puntos coincidentes, evaluada en el vacío del campo escalar libre de masa m_1 es

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_1 &= \frac{1}{2} \langle \pi(x)\pi(y) \rangle_1 + \frac{1}{2} \langle \nabla_x \phi(x) \cdot \nabla_y \phi(y) \rangle_1 + \frac{1}{2} m_0^2 \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_1 \\ &\quad - \xi_c \langle \nabla_x^2 \phi(x)\phi(y) + \phi(x)\nabla_y^2 \phi(y) + 2\nabla_x \phi(x)\nabla_y \phi(y) \rangle_1. \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

Aquí $\langle \dots \rangle_1$ significa que el valor de espectación es tomado en un estado de la teoría \mathcal{T}_1 . Es importante tomar primero el límite $x_0 = y_0$ que el límite $|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow 0$. Nótese que la última contribución a T_{00} , dada por el improving, se anula idénticamente por invariancia de traslación.

Por comodidad, reescribimos aquí (4.8.15):

$$\Delta \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_\Sigma = k \left(\eta_\mu(x)\eta_\nu(x) - \frac{g_{\mu\nu}}{d} \right) + \mathcal{O}(K^2\epsilon^2) + \dots \quad (\text{B.0.5})$$

Para que $T_{\mu\nu}$ (que viene dado en términos de $\phi(x)$ y $\pi(x)$ para x en la superficie espacial $x_0 = 0$) sea un tensor de traza cero cuando $m_0 = 0$, debemos usar las ecuaciones de movimiento de masa cero en $d > 2$ sobre las componentes i, j , dado que estas contienen términos $\partial_0^2 \phi$. Usando la isotropía de la superficie espacial, se tiene que

$$\langle T_{ij} \rangle_1 = \frac{\langle T_{00} \rangle_1}{d-1} \delta_{ij}. \quad (\text{B.0.6})$$

Comparando con (B.0.5), tenemos que $\eta_\mu = \delta_{\mu 0}$, y $k = \frac{d}{d-1} \langle T_{00} \rangle$.

Dada (B.0.4), podemos ahora evaluar $\Delta \langle T_{00} \rangle = \langle T_{00} \rangle_1 - \langle T_{00} \rangle_0$. En $d = 2$ y con $x_0 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \Delta \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \left[(m_0^2 - m_1^2) K_0(m|\vec{x}|) - \frac{2m_1}{|\vec{x}|} K_1(m|\vec{x}|) + 2\frac{m_0}{|\vec{x}|} K_1(m_0|\vec{x}|) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} [m_1^2 - m_0^2 + 2m_0^2 \log(m_0/m_1)] \end{aligned} \quad (\text{B.0.7})$$

en el límite $|\vec{x}| \rightarrow 0$. Esta función es positiva para toda m_0 y m_1 , alcanzando un mínimo de cero en m_0 como función de m_1 . Como hemos visto, para $m_0 = 0$ esta positividad es necesaria para tener una entropía relativa positiva.

En $d \geq 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d = 2 \quad \Delta \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{8\pi} [m_1^2 - m_0^2 + 2m_0^2 \log(m_0/m_1)] , \\
d = 3 \quad \Delta \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{24\pi} (m_1 - m_0)^2 (m_1 + 2m_0) , \\
d = 4 \quad \Delta \langle T_{00} \rangle &= -\frac{(m_0^2 - m_1^2)^2}{32\pi^2} \log(\epsilon) , \\
d = 5 \quad \Delta \langle T_{00} \rangle &= \frac{(m_1^2 - m_0^2)^2}{64\pi^2 \epsilon} , \\
d = 6 \quad \Delta \langle T_{00} \rangle &= \frac{(m_1^2 - m_0^2)^2}{64\pi^3 \epsilon^2} , \\
&\dots \\
d = d \quad \Delta \langle T_{00} \rangle &\propto \frac{(m_1^2 - m_0^2)^2}{\epsilon^{d-4}} .
\end{aligned} \tag{B.0.8}$$

Podemos apreciar que todos son positivos para todo m_0, m_1 . La perturbación del Hamiltoniano debido a un término de masa tiene dimensión $\Delta = d - 2$, con constante de acoplamiento m_1^2 . Estos resultados coinciden con lo esperado: tener un $\Delta \langle T_{\mu\nu} \rangle$ finito para $\Delta < d/2$, que se traduce en ser finito para $d < 4$. De hecho, para el caso finito $d = 2, 3$, obtenemos los mismos resultados con otras regularizaciones (lattice, momentos). Para los casos divergentes $d \geq 4$ los resultados también coinciden con lo esperado del análisis de la teoría de perturbación conforme (para $m_0 = 0$), el cual es, $\Delta \langle T_{00} \rangle \sim g^2/\epsilon^{2\Delta-d} = m_1^4/\epsilon^{d-4}$. Se obtiene un resultado similar para fermiones libres. Sin embargo, para fermiones $\Delta \langle T_{00} \rangle \sim m^2/\epsilon^{d-2}$ diverge en todas las dimensiones, como corresponde a un $\Delta = d - 1$. Sobre la superficie nula, la entropía relativa es finita para $d = 2, 3, 4, 5$ para escalares y finita en $d = 2, 3$ para fermiones.

Apéndice C

Una regularización invariante de Lorentz de la entropía

En este apéndice se discute una regularización invariante de Lorentz de la entropía de entrelazado usando la información mutua, que es aplicable a toda QFT en cualquier dimensión. Esta regularización está discutida en detalle en el caso de $d = 3$ en [103]. Restringimos nuestra atención al caso de superficies de entrelazado suaves, lo cual es suficiente para lo que necesitamos para esta Tesis.

Sea la superficie de entrelazado suave γ de codimensión 2, que delimita el borde de una superficie de Cauchy en dimensión espacio-temporal d . Tomamos un vector η espacial y normal a γ , y una función $\epsilon(x)$ en γ , que varía suavemente. Sobre esta función tomaremos más tarde el límite $\epsilon(x) \rightarrow 0$, e impondremos que en este límite las derivadas de $\epsilon(x)$ tienden a cero a la misma velocidad que $\epsilon(x)$. Construimos dos superficies espaciales, una a cada lado de γ , usando los elementos del “framing” (η, ϵ) ,

$$\gamma^+ = \gamma + \frac{\epsilon}{2}\eta, \quad (\text{C.0.1})$$

$$\gamma^- = \gamma - \frac{\epsilon}{2}\eta. \quad (\text{C.0.2})$$

La idea es usar la información mutua $I(\gamma^+, \gamma^-)$ para regularizar la entropía de entrelazado como se discutió en la Sección 2.2.9. De forma más precisa, tomamos

$$S_{\text{reg}}(\gamma, \eta, \epsilon) = \frac{I(\gamma^+, \gamma^-)}{2} = \frac{1}{2} (S(\gamma^+) + S(\gamma^-) - S(\gamma^+ \cup \gamma^-)) . \quad (\text{C.0.3})$$

Para regularizar la entropía de Rényi usamos, de forma análoga, la información mutua de las entropías de Rényi

$$I_n(\gamma^+, \gamma^-) = S_n(\gamma^+) + S_n(\gamma^-) - S_n(\gamma^+ \cup \gamma^-) . \quad (\text{C.0.4})$$

El factor de $1/2$ en (C.0.3) toma en cuenta que la información mutua de regiones com-

plementarias para un estado global puro es dos veces la entropía. Un punto importante es que la información mutua es independiente de la regularización que se haga de la teoría. O sea, al tomar el límite del continuo en cualquier regularización que se haga de una QFT para calcular las entropías en el miembro derecho de (C.0.3) o (C.0.4), se obtiene siempre el mismo resultado finito, independiente de la regularización. Por ello, S_{reg} es una cantidad que pertenece a la teoría del continuo, y en particular es invariante de Lorentz en el vacío. El framing simétrico particular en ambos lados de γ en (C.0.3) nos da la misma entropía regularizada para las regiones complementarias, que es una propiedad que debe tener la entropía de un estado global puro.

Sin embargo, S_{reg} depende del framing, que incluye el campo vectorial η y la función $\epsilon(x)$, por lo que no es una función solamente de la superficie γ . Con el objetivo de eliminar esta dependencia en el framing, notemos que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, solo conservamos las potencias no positivas de ϵ . La dependencia en η solo aparece entonces en los términos divergentes. Como estos son producidos por entrelazado ultra-local entre los grados de libertad dispuestos arbitrariamente cerca y en lados opuestos de la superficie de entrelazado γ , estas contribuciones pueden ser escritas como integrales de términos geométricos locales a lo largo de γ . Podemos simplemente sustraer dichos términos para eliminar la dependencia en el framing (η, ϵ)

$$S_{\text{reg}}(\gamma) = S_{\text{reg}}(\gamma, \eta, \epsilon) - \text{divergencias locales y extensivas} . \quad (\text{C.0.5})$$

Esta $S_{\text{reg}}(\gamma)$ es invariante de Lorentz y completamente definida por la teoría misma (y no por la regularización que se haga de ella). Puede pensarse como una entropía “mínimamente sustraída”.

A pesar de que $S_{\text{reg}}(\gamma)$ no es necesariamente positiva en general, sí posee otras propiedades importantes de la entropía de entrelazado: la simetría entre las regiones complementarias, y la subaditividad fuerte. Mostramos esta última propiedad en lo que sigue.

Tomemos dos regiones γ_A y γ_B con intersección $\gamma_A \cap \gamma_B$ y unión $\gamma_A \cup \gamma_B$ suaves. Tomamos además que γ_A y γ_B tienen framings compatibles, o sea, framings tales que la unión y la intersección son framings suaves de $\gamma_A \cup \gamma_B$ y $\gamma_A \cap \gamma_B$ respectivamente, como en la Figura C.1. Esto tiene como consecuencia que las entropías de las franjas se cancelen exactamente

$$S(\gamma_A^+ \cup \gamma_A^-) + S(\gamma_B^+ \cup \gamma_B^-) - S(\gamma_{A \cap B}^+ \cup \gamma_{A \cap B}^-) - S(\gamma_{A \cup B}^+ \cup \gamma_{A \cup B}^-) = 0 . \quad (\text{C.0.6})$$

Esto se justifica por el hecho de que la entropía de estas franjas pueden expresarse como una expansión en potencias inversas de ϵ , y esa expansión debe ser local y extensiva a lo largo de la franja. Pensando en las entropías de Rényi, esto debe ser una propiedad

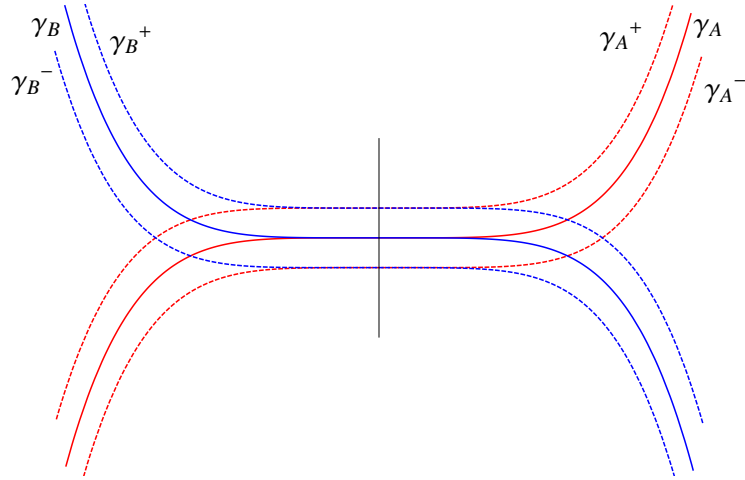


Figura C.1: Subaditividad fuerte de la entropía regularizada $S_{\text{reg}}(\gamma)$ para las regiones γ_A y γ_B con intersección y unión suaves. Los framings de γ_A y γ_B pueden ser elegidos de forma compatible, o sea, son tales que los framings que resultan para la unión y la intersección son suaves.

del OPE de los operadores de twist asociados a las superficies de entrelazado. La cancelación (C.0.6) da lugar a la subaditividad fuerte de la entropía regularizada $S_{\text{reg}}(\gamma)$, simplemente porque la entropía misma (de von Neumann) cumple la subaditividad fuerte,

$$S_{\text{reg}}(\gamma_A) + S_{\text{reg}}(\gamma_B) - S_{\text{reg}}(\gamma_{A \cap B}) - S_{\text{reg}}(\gamma_{A \cup B}) = \frac{1}{2} (S(\gamma_A^+) + S(\gamma_B^+) - S(\gamma_{A \cap B}^+) - S(\gamma_{A \cup B}^+)) \quad (\text{C.0.7})$$

$$+ S(\gamma_A^-) + S(\gamma_B^-) - S(\gamma_{A \cap B}^-) - S(\gamma_{A \cup B}^-) \geq 0. \quad (\text{C.0.8})$$

Otra forma de ver esto es la siguiente. Como los términos dependientes del framing son locales y extensivos, son siempre Markovianos, o sea, saturan la subaditividad fuerte, (C.0.6), para superficies con unión e intersección suaves. Restar estos términos dependientes del framing a la entropía, para obtener $S_{\text{reg}}(\gamma)$, no tiene ningún costo sobre la subaditividad fuerte, con lo cual $S_{\text{reg}}(\gamma)$ cumple la subaditividad fuerte.

Apéndice D

Comentarios sobre la presencia de defectos

La fórmula holográfica para la entropía contiene términos que dependen de las derivadas de γ . Queremos comentar sobre la interpretación de estos términos cuando γ no es suave. Veremos el caso en que solamente la primera derivada es discontinua, y por simplicidad haremos la discusión solo en los casos en que $d = 3, 4$.

Para una superficie suave, $\nabla_{\Omega}^2(\tilde{r}^{-1})$ es finita cuando $\theta \rightarrow 0$; de (6.2.26) entonces tenemos que $\partial_{\theta}(\tilde{r}(0, \Omega)^{-1}) = 0$ y nuestro resultado anterior se aplica. Esto deja de ser cierto cerca de un defecto. Supongamos que hay alguna singularidad tipo

$$\nabla_{\Omega}^2(\tilde{r}^{-1}) = C_0 \theta^{-\nu}, \quad \theta \rightarrow 0 \quad (\text{D.0.1})$$

a medida que nos acercamos a la frontera. Resolviendo la ecuación de movimiento para θ pequeña encontramos

$$\tilde{r}^{-1} \approx \frac{C_0}{(2 - \nu)(d + \nu - 2)} \theta^{2-\nu}. \quad (\text{D.0.2})$$

Las potencias negativas de θ en $\nabla_{\Omega}^2 \tilde{r}^{-1}$ modificarán la expansión en (6.2.26). Veremos que $\nu = 1$ para defectos de codimensión uno.

Por simplicidad tomemos el caso de $d = 3$, y consideremos una esquina en $\phi = \phi_0$ con ángulo local α . Cerca de la esquina tendremos que $\gamma''(\phi) \sim \delta(\phi - \phi_0) \tan \alpha$. A θ finita esta función delta se suaviza. Por análisis dimensional,

$$\partial_{\phi}^2(\tilde{r}(\theta, \phi)^{-1}) \approx \frac{\tan \alpha}{\pi} \frac{\theta}{\theta^2 + (\phi - \phi_0)^2}, \quad (\text{D.0.3})$$

debe ser válida para θ pequeña y cerca de la esquina. Se tiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\theta}{\theta^2 + (\phi - \phi_0)^2} = \delta(\phi - \phi_0). \quad (\text{D.0.4})$$

Sustituyendo (D.0.3) en la ecuación del área mínima y expandiendo para θ pequeña encontramos

$$\partial_\theta(\tilde{r}(0, \phi)^{-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \tan \alpha, & \phi = \phi_0 \\ 0, & \phi \neq \phi_0 \end{cases} \quad (\text{D.0.5})$$

Esto puede chequearse calculando los coeficientes de Fourier y haciendo la suma de (6.2.18). Por ejemplo, el cálculo puede ser hecho explícitamente para una esquina de la forma $\sin |\phi|$.

Lo mismo sucedería en $d \geq 4$ siempre que el defecto tenga codimensión uno, con la ϕ de arriba como las coordenadas locales normales. De hecho, para un defecto en ϕ_0 que luzca localmente como $\gamma^{-1} \sim |\phi - \phi_0|$, tenemos que $\nabla_\Omega^2 \gamma^{-1} \sim \delta(\phi - \phi_0)$. Esto equivale a que $|\phi - \phi_0|$ es la función de Green en dimensión uno. Esto también nos dice que las contribuciones de los defectos de codimensión mayor serán menores. De hecho, para tener una función delta de $\nabla_\Omega^2 \gamma^{-1}$ a codimensión n , necesitaríamos que $\gamma^{-1} \sim 1/|\vec{x} - \vec{x}_0|^{n-2}$. Sin embargo, estamos considerando curvas sin dichas divergencias (curvas continuas), y todas las contribuciones de los defectos tendrán $\nu < 1$, con $\nu = 1$ para defectos de codimensión uno.

Concluimos que la integral de área no se afecta por los defectos, dado que (D.0.5) modifica la expansión de $\beta(\Omega)$ en un conjunto de medida cero (donde se localizan los defectos). La fórmula (6.2.28) para la entropía debe ser integrada en cada lado del defecto en donde la expansión regular en θ funciona, y no hay contribución de los defectos. Como consecuencia, la propiedad Markoviana se mantiene en presencia de curvas con defectos o puntas. Debemos tener cuidado, sin embargo, en no eliminar los términos de borde al integrar por partes cuando hay un defecto. Por ejemplo, el término finito con un Laplaciano en $d = 4$ puede ser tratado de la siguiente forma cuando hay un defecto. Integramos en los parches suaves P_i para obtener

$$\int_{P_i} d\Omega r \nabla_\Omega^2 r^{-1} = \int_{P_i} d\Omega \frac{\nabla_\Omega r \cdot \nabla_\Omega r}{r^2} - \int_{\partial P_i} dl \eta \cdot \frac{\nabla_\Omega r}{r}, \quad (\text{D.0.6})$$

donde el producto escalar es con la métrica esférica, y η en el último término es el vector externo normal a la superficie ∂P_i sobre la esfera. El primer término tiene un integrando discontinuo pero acotado en los bordes (la posición del defecto).

Es interesante ver que escrito de esta forma, la contribución del integrando local se cancela localmente en la SSA, pero que el segundo término se cancela en la SSA porque la contribución de la intersección y de la unión tienen signos opuestos. Esto es porque tienen el mismo $(\nabla_\Omega r)/r$ en cada punto del defecto que resulta de tomar la intersección y la unión, pero los η 's son opuestos.

Apéndice E

Curvaturas extrínsecas sobre el cono nulo

En este Apéndice mostramos que la curvatura extrínseca de una superficie γ sobre un cono nulo en un espacio plano es una combinación de los invariantes geométricos intrínsecos de γ , y por ello, los términos en una funcional de γ que se puedan construir con la curvatura extrínseca de γ , no contribuyen más a esta de lo que ya lo hacen los términos que se construyen con las cantidades intrínsecas discutidas en la Sección 6.1.

Tenemos una superficie $r = \gamma(\Omega)$ en el cono nulo $r^+ = 0$. Definamos $n^{(1)} = \hat{r} - \hat{t}$ como el vector nulo paralelo (pero ortogonal en métrica) al cono nulo. Sea $q = 1/2(\hat{r} + \hat{t})$, con $q^2 = 0$, $q \cdot n^{(1)} = 1$. El espacio ortogonal a γ está formado por $n^{(1)}$ y otro vector nulo $n^{(2)}$ dado por

$$n^{(2)} = q - \frac{1}{2}(\nabla\gamma)^2 n^{(1)} - \nabla\gamma. \quad (\text{E.0.1})$$

Estos están normalizados tal que $n^{(1)} \cdot n^{(2)} = 1$.

La curvatura extrínseca correspondiente a $n^{(i)}$ viene definida por

$$K_{\mu\nu}^{(i)} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta^{(i)}, \quad (\text{E.0.2})$$

con

$$P_\beta^\alpha = g_\beta^\alpha - n^{(1)\alpha} n_\beta^{(2)} - n^{(2)\alpha} n_\beta^{(1)} \quad (\text{E.0.3})$$

el proyector en el espacio tangente a γ .

El vector $n_\mu^{(1)} = x_\mu/(|\vec{x}|)$ en coordenadas Cartesianas. Obtenemos

$$K_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{g_{\mu\nu}^{\text{ind}}}{\gamma}, \quad (\text{E.0.4})$$

con g^{ind} la métrica inducida en γ . La otra curvatura extrínseca es

$$K_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{g_{\mu\nu}^{\text{ind}}}{\gamma} - \frac{1}{2} (\nabla\gamma)^2 \frac{g_{\mu\nu}^{\text{ind}}}{\gamma} - (\nabla_\mu \nabla_\nu \gamma)^{\text{ind}}, \quad (\text{E.0.5})$$

donde hemos usado que las derivadas de \hat{t} son cero y por ello que el gradiente de q es un medio el de $n^{(1)}$. En el último término las segundas derivadas son al final proyectadas en el subespacio paralelo. Tenemos que $\nabla_\mu^{\text{ind}} \gamma = \nabla \gamma + (\nabla \gamma)^2 n^{(1)}$ porque este vector es paralelo a la superficie. Entonces $(\nabla_\mu \nabla_\nu \gamma)^{\text{ind}} = \nabla_\mu^{\text{ind}} \nabla_\nu^{\text{ind}} \gamma - (\nabla \gamma)^2 g_{\mu\nu}^{\text{ind}} / \gamma$. Usando las variables angulares de la esfera tenemos que la métrica inducida sobre γ es $ds^2 = \gamma(\Omega)^2 d\Omega^2$. Tenemos, escribiendo todas las derivadas covariantes y las contracciones con respecto a la $g_{\mu\nu}$ de la esfera unidad

$$K_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \gamma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\nabla \gamma)^2 \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma} - \nabla_\mu \nabla_\nu \gamma + 2 \frac{\nabla_\mu \gamma \nabla_\nu \gamma}{\gamma}. \quad (\text{E.0.6})$$

Por otro lado, usando las fórmulas para la transformación conforme, el escalar y el tensor de Ricci vienen dados por

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{\text{ind}} &= R_{\mu\nu} - (d_\perp - 2) \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu \gamma}{\gamma} + 2(d_\perp - 2) \frac{\nabla_\mu \gamma \nabla_\nu \gamma}{\gamma^2} + g_{\mu\nu} \left((3 - d_\perp) \frac{(\nabla \gamma)^2}{\gamma^2} - \frac{\nabla^2 \gamma}{\gamma} \right), \\ g_{\mu\nu}^{\text{ind}} R^{\text{ind}} &= g_{\mu\nu} \left(R - 2(d_\perp - 1) \frac{\nabla^2 \gamma}{\gamma} + (d_\perp - 1)(4 - d_\perp) \frac{(\nabla \gamma)^2}{\gamma^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.0.7})$$

Usando que en la esfera unidad $R_{\mu\nu} = (d_\perp - 1)g_{\mu\nu}$ y $R = d_\perp(d_\perp - 1)$ tenemos

$$K_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{\gamma}{d_\perp - 2} \left(R_{\mu\nu}^{\text{ind}} - \frac{1}{2(d_\perp - 1)} g_{\mu\nu}^{\text{ind}} R^{\text{ind}} \right). \quad (\text{E.0.8})$$

Por lo tanto, de (E.0.4) y (E.0.8) concluimos que usando las curvaturas extrínsecas de γ no nos podemos formar invariantes adicionales a los formados con los intrínsecos de γ sobre el cono nulo. Por ejemplo, el invariante multiplicando a la anomalía tipo- B en la formula de Solodukhin [27] para el término universal logarítmico de la EE en $d = 4$ se anula,

$$K_{\mu\nu}^{(1)} K^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} K_\mu^{(1)\mu} K_\mu^{(2)\mu} = 0, \quad (\text{E.0.9})$$

y solo la anomalía- A contribuye en el cono.

Bibliografía

- [1] Kitaev, A., Preskill, J. Topological entanglement entropy. *Physical review letters*, **96** (11), 110404, 2006. [1](#)
- [2] Ryu, S., Takayanagi, T. Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 181602, 2006. [1](#), [58](#), [191](#)
- [3] Casini, H., Huerta, M. A c-theorem for entanglement entropy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **40** (25), 7031, 2007. [3](#), [65](#), [83](#)
- [4] Casini, H., Huerta, M. Entanglement entropy in free quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42** (50), 504007, 2009. [35](#), [44](#)
- [5] Swingle, B. Entanglement Renormalization and Holography. *Phys. Rev.*, **D86**, 065007, 2012.
- [6] Vidal, G. Entanglement Renormalization. *Phys. Rev. Lett.*, **99** (22), 220405, 2007.
- [7] Vedral, V. The role of relative entropy in quantum information theory. *Reviews of Modern Physics*, **74**, 197–234, ene. 2002. [14](#)
- [8] Calabrese, P., Cardy, J. Entanglement entropy and conformal field theory. *J. Phys.*, **A42**, 504005, 2009. [1](#), [36](#), [37](#), [40](#), [152](#)
- [9] Calabrese, P., Cardy, J. Time dependence of correlation functions following a quantum quench. *Physical review letters*, **96** (13), 136801, 2006.
- [10] Nishioka, T. Entanglement entropy: holography and renormalization group. *arXiv preprint arXiv:1801.10352*, 2018. [1](#)
- [11] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. Quantum computation and quantum information. Cambridge university press, 2010. [1](#)
- [12] Levin, M., Wen, X.-G. Detecting topological order in a ground state wave function. *Physical review letters*, **96** (11), 110405, 2006. [1](#)

- [13] Holzhey, C., Larsen, F., Wilczek, F. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory. *Nucl. Phys.*, **B424**, 443–467, 1994. [1](#), [36](#), [40](#), [42](#)
- [14] Vidal, G., Latorre, J. I., Rico, E., Kitaev, A. Entanglement in quantum critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 227902, 2003.
- [15] Fradkin, E., Moore, J. E. Entanglement entropy of 2d conformal quantum critical points: hearing the shape of a quantum drum. *Physical review letters*, **97** (5), 050404, 2006. [1](#)
- [16] Jafferis, D. L., Lewkowycz, A., Maldacena, J., Suh, S. J. Relative entropy equals bulk relative entropy. *JHEP*, **06**, 004, 2016. [1](#), [17](#)
- [17] Faulkner, T., Lewkowycz, A., Maldacena, J. Quantum corrections to holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (11), 74, 2013. [94](#)
- [18] Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., Oz, Y. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, **323** (3-4), 183–386, 2000. [56](#), [107](#)
- [19] Maldacena, J. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, **38** (4), 1113–1133, 1999. [1](#), [56](#)
- [20] Van Raamsdonk, M. Building up spacetime with quantum entanglement. *General Relativity and Gravitation*, **42** (10), 2323–2329, 2010. [1](#)
- [21] Wolf, M. M., Verstraete, F., Hastings, M. B., Cirac, J. I. Area laws in quantum systems: mutual information and correlations. *Physical review letters*, **100** (7), 070502, 2008. [1](#), [15](#), [43](#)
- [22] Srednicki, M. Entropy and area. *Physical Review Letters*, **71** (5), 666, 1993.
- [23] Eisert, J., Cramer, M., Plenio, M. B. Area laws for the entanglement entropy - a review. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 277–306, 2010. [1](#), [43](#)
- [24] Bombelli, L., Koul, R. K., Lee, J., Sorkin, R. D. Quantum source of entropy for black holes. *Physical Review D*, **34** (2), 373, 1986. [1](#), [94](#)
- [25] Susskind, L., Uglum, J. Black hole entropy in canonical quantum gravity and superstring theory. *Physical Review D*, **50** (4), 2700, 1994. [94](#), [95](#)
- [26] Solodukhin, S. N. Entanglement entropy of black holes. *Living Reviews in Relativity*, **14** (1), 8, 2011. [1](#), [94](#)
- [27] Solodukhin, S. N. Entanglement entropy, conformal invariance and extrinsic geometry. *Phys. Lett.*, **B665**, 305–309, 2008. [1](#), [188](#), [240](#)

- [28] Casini, H., Huerta, M. Analytic results on the geometric entropy for free fields. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2008** (01), P01012, 2008. [36](#)
- [29] Casini, H., Huerta, M., Myers, R. C., Yale, A. Mutual information and the f-theorem. *Journal of High Energy Physics*, **2015** (10), 3, 2015. [1](#)
- [30] Casini, H., Huerta, M. A finite entanglement entropy and the c-theorem. *Physics Letters B*, **600** (1-2), 142–150, 2004. [2](#), [3](#), [65](#)
- [31] Casini, H., Landea, I. S., Torroba, G. The g-theorem and quantum information theory. *JHEP*, **10**, 140, 2016. [2](#), [16](#), [127](#), [128](#)
- [32] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Relative entropy and the RG flow. *JHEP*, **03**, 089, 2017. [2](#), [16](#), [64](#), [127](#), [214](#)
- [33] Casini, H., Mazzitelli, F. D., Testé, E. Area terms in entanglement entropy. *Phys. Rev.*, **D91** (10), 104035, 2015. [94](#), [96](#), [102](#), [103](#), [105](#), [137](#)
- [34] Casini, H. Relative entropy and the Bekenstein bound. *Class. Quant. Grav.*, **25**, 205021, 2008. [16](#)
- [35] Blanco, D. D., Casini, H. Localization of Negative Energy and the Bekenstein Bound. *Phys. Rev. Lett.*, **111** (22), 221601, 2013. [2](#), [16](#), [162](#), [166](#)
- [36] Hofman, D. M., Maldacena, J. Conformal collider physics: Energy and charge correlations. *JHEP*, **05**, 012, 2008. [2](#), [166](#)
- [37] Faulkner, T., Leigh, R. G., Parrikar, O., Wang, H. Modular Hamiltonians for Deformed Half-Spaces and the Averaged Null Energy Condition. *JHEP*, **09**, 038, 2016. [2](#), [16](#), [62](#), [145](#), [146](#), [166](#)
- [38] Balakrishnan, S., Faulkner, T., Khandker, Z. U., Wang, H. A General Proof of the Quantum Null Energy Condition, 2017.
- [39] Lashkari, N., Lin, J., Ooguri, H., Stoica, B., Van Raamsdonk, M. Gravitational positive energy theorems from information inequalities. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **2016** (12), 2016. [2](#), [61](#)
- [40] Casini, H., Huerta, M. A Finite entanglement entropy and the c-theorem. *Phys. Lett.*, **B600**, 142–150, 2004. [2](#), [64](#), [203](#)
- [41] Casini, H., Huerta, M. On the RG running of the entanglement entropy of a circle. *Phys. Rev.*, **D85**, 125016, 2012. [3](#), [64](#), [65](#), [88](#), [203](#), [225](#)

- [42] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Markov Property of the Conformal Field Theory Vacuum and the a Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **118** (26), 261602, 2017. [3](#), [203](#), [205](#), [209](#)
- [43] Lashkari, N. Entanglement at a Scale and Renormalization Monotones, 2017. [2](#)
- [44] Zamolodchikov, A. B. Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.*, **43**, 730–732, 1986. [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*43,565(1986)]. [2](#), [63](#), [64](#), [65](#), [68](#), [94](#), [139](#)
- [45] Cardy, J. L. Is There a c Theorem in Four-Dimensions? *Phys. Lett.*, **B215**, 749–752, 1988. [2](#), [64](#)
- [46] Komargodski, Z., Schwimmer, A. On Renormalization Group Flows in Four Dimensions. *JHEP*, **12**, 099, 2011. [2](#), [64](#), [65](#), [76](#), [185](#), [189](#), [221](#)
- [47] Myers, R. C., Sinha, A. Seeing a c -theorem with holography. *Phys. Rev.*, **D82**, 046006, 2010. [2](#), [3](#), [45](#), [64](#), [104](#)
- [48] Jafferis, D. L., Klebanov, I. R., Pufu, S. S., Safdi, B. R. Towards the F-Theorem: $N=2$ Field Theories on the Three-Sphere. *JHEP*, **06**, 102, 2011. [2](#), [45](#), [64](#)
- [49] Casini, H., Huerta, M., Myers, R. C. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. *JHEP*, **05**, 036, 2011. [2](#), [4](#), [16](#), [27](#), [45](#), [46](#), [50](#), [64](#), [149](#)
- [50] Liu, H., Mezei, M. A Refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom. *JHEP*, **04**, 162, 2013. [3](#), [213](#), [215](#)
- [51] Giombi, S., Klebanov, I. R. Interpolating between a and F . *JHEP*, **03**, 117, 2015. [3](#)
- [52] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. All the entropies on the light-cone. *arXiv, hep-th*, 1802.04278, 2018. [3](#), [143](#), [205](#)
- [53] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Modular hamiltonians on the null plane and the markov property of the vacuum state. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **50** (36), 364001, 2017. [3](#), [143](#)
- [54] Hislop, P. D., Longo, R. Modular Structure of the Local Algebras Associated With the Free Massless Scalar Field Theory. *Commun. Math. Phys.*, **84**, 71, 1982. [4](#), [27](#), [46](#), [149](#)
- [55] Casini, H., Huerta, M. Reduced density matrix and internal dynamics for multi-component regions. *Classical and quantum gravity*, **26** (18), 185005, 2009. [4](#)

- [56] Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, **5** (1), 3–55, 2001. [8](#)
- [57] Ohya, M., Petz, D. Quantum entropy and its use. Springer Science & Business Media, 2004. [9](#), [12](#)
- [58] Petz, D. Quantum information theory and quantum statistics. Springer Science & Business Media, 2007. [13](#), [19](#), [20](#), [174](#)
- [59] Haag, R. Local quantum physics: Fields, particles, algebras. 1992. [16](#), [24](#), [46](#), [47](#), [49](#), [74](#)
- [60] Borchers, H. J. On revolutionizing quantum field theory with tomitas modular theory. *Journal of Mathematical Physics*, **41** (6), 3604–3673, 2000. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.533323>. [16](#), [32](#), [146](#), [161](#), [163](#)
- [61] Casini, H., Huerta, M., Myers, R. C. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (5), 36, 2011. [16](#)
- [62] Hartman, T., Kundu, S., Tajdini, A. Averaged Null Energy Condition from Causality. *JHEP*, **07**, 066, 2017. [16](#), [146](#)
- [63] Blanco, D. D., Casini, H., Hung, L.-Y., Myers, R. C. Relative Entropy and Holography. *JHEP*, **08**, 060, 2013. [17](#), [62](#), [97](#)
- [64] Wong, G., Klich, I., Pando Zayas, L. A., Vaman, D. Entanglement Temperature and Entanglement Entropy of Excited States. *JHEP*, **12**, 020, 2013.
- [65] Herzog, C. P. Universal Thermal Corrections to Entanglement Entropy for Conformal Field Theories on Spheres. *JHEP*, **10**, 28, 2014.
- [66] Jafferis, D. L., Suh, S. J. The Gravity Duals of Modular Hamiltonians. *JHEP*, **09**, 068, 2016.
- [67] Lashkari, N. Modular Hamiltonian for Excited States in Conformal Field Theory. *Phys. Rev. Lett.*, **117** (4), 041601, 2016.
- [68] Faulkner, T., Leigh, R. G., Parrikar, O. Shape Dependence of Entanglement Entropy in Conformal Field Theories. *JHEP*, **04**, 088, 2016.
- [69] Cardy, J., Tonni, E. Entanglement hamiltonians in two-dimensional conformal field theory. *J. Stat. Mech.*, **1612** (12), 123103, 2016.
- [70] Sarosi, G., Ugajin, T. Relative entropy of excited states in two dimensional conformal field theories. *JHEP*, **07**, 114, 2016. [17](#)

- [71] Hayden, P., Jozsa, R., Petz, D., Winter, A. Structure of states which satisfy strong subadditivity of quantum entropy with equality. *Communications in mathematical physics*, **246** (2), 359–374, 2004. [18](#), [179](#)
- [72] Lieb, E. H. Convex trace functions and the wigner-yanase-dyson conjecture. *Advances in Mathematics*, **11** (3), 267 – 288, 1973. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000187087390011X>. [19](#)
- [73] Streater, R. F., Wightman, A. S. PCT, spin and statistics, and all that. Princeton University Press, 2016. [21](#), [33](#), [74](#)
- [74] Casini, H. The logic of causally closed spacetime subsets. *Classical and Quantum Gravity*, **19** (24), 6389, 2002. [23](#)
- [75] Casini, H., Huerta, M., Rosabal, J. A. Remarks on entanglement entropy for gauge fields. *Physical Review D*, **89** (8), 085012, 2014. [24](#)
- [76] Borchers, H.-J., *et al.* On the converse of the reeh-schlieder theorem. *Communications in Mathematical Physics*, **10** (4), 269–273, 1968. [26](#)
- [77] Schlieder, S. Some remarks about the localization of states in a quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*, **1** (4), 265–280, 1965.
- [78] Summers, S. J. Yet more ado about nothing: the remarkable relativistic vacuum state. *Deep Beauty*, págs. 317–341, 2011.
- [79] Jaekel, C. D. The Reeh-Schlieder property for ground states. *Annalen Phys.*, **12**, 289–299, 2003. [26](#)
- [80] Wall, A. C. A proof of the generalized second law for rapidly changing fields and arbitrary horizon slices. *Phys. Rev.*, **D85**, 104049, 2012. [Erratum: *Phys. Rev.*D87,no.6,069904(2013)]. [26](#), [145](#), [166](#), [223](#)
- [81] Bisognano, J. J., Wichmann, E. H. On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field. *J. Math. Phys.*, **16**, 985–1007, 1975. [27](#)
- [82] Arias, R., Blanco, D., Casini, H., Huerta, M. Local temperatures and local terms in modular Hamiltonians. *Phys. Rev.*, **D95** (6), 065005, 2017. [27](#)
- [83] Lledó, F. Modular theory by example. *Aspects of Operator Algebras and Applications, Contemp. Math*, **534**, 73–95, 2011. [32](#)
- [84] Takesaki, M. Tomita’s theory of modular Hilbert algebras and its applications, tomo 128. Springer, 2006.

- [85] Summers, S. J. Tomita-takesaki modular theory. *arXiv preprint math-ph/0511034*, 2005. [32](#)
- [86] Witten, E. Notes on some entanglement properties of quantum field theory. *arXiv preprint arXiv:1803.04993*, 2018. [33](#)
- [87] Rangamani, M., Takayanagi, T. Holographic entanglement entropy. En: Holographic Entanglement Entropy, págs. 35–47. Springer, 2017. [35](#)
- [88] Lewkowycz, A., Maldacena, J. Generalized gravitational entropy. *JHEP*, **08**, 090, 2013. [36](#), [60](#), [222](#)
- [89] Dong, X., Lewkowycz, A., Rangamani, M. Deriving covariant holographic entanglement. *JHEP*, **11**, 028, 2016. [36](#), [222](#)
- [90] Cardy, J. Some results on the mutual information of disjoint regions in higher dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46** (28), 285402, 2013. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/46/i=28/a=285402>. [95](#), [152](#)
- [91] Agn, C., Faulkner, T. Quantum Corrections to Holographic Mutual Information. *JHEP*, **08**, 118, 2016. [36](#)
- [92] Cardy, J. L., Castro-Alvaredo, O. A., Doyon, B. Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy. *Journal of Statistical Physics*, **130** (1), 129–168, 2008. [38](#)
- [93] Bousso, R., Casini, H., Fisher, Z., Maldacena, J. Entropy on a null surface for interacting quantum field theories and the Bousso bound. *Phys. Rev.*, **D91** (8), 084030, 2015. [39](#), [145](#), [152](#), [153](#), [154](#), [155](#), [156](#), [157](#)
- [94] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Zamolodchikov, A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, **241** (2), 333–380, 1984. [40](#), [41](#)
- [95] Cardy, J. L. Conformal invariance and statistical mechanics. *Les Houches*, 1988. [40](#)
- [96] Cardy, J. The ubiquitous c: from the stefan–boltzmann law to quantum information. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2010** (10), P10004, 2010. [40](#)
- [97] Simmons-Duffin, D. Tasi lectures on the conformal bootstrap. *arXiv preprint arXiv:1602.07982*, 2016. [41](#), [74](#)

- [98] Francesco, P., Mathieu, P., Sénéchal, D. Conformal field theory. Springer Science & Business Media, 2012. [41](#)
- [99] Bueno, P., Myers, R. C., Witczak-Krempa, W. Universality of corner entanglement in conformal field theories. *Physical review letters*, **115** (2), 021602, 2015. [44](#)
- [100] Myers, R. C., Singh, A. Entanglement entropy for singular surfaces. *Journal of High Energy Physics*, **2012** (9), 13, 2012.
- [101] Elvang, H., Hadjiantonis, M. Exact results for corner contributions to the entanglement entropy and rényi entropies of free bosons and fermions in 3d. *Physics Letters B*, **749**, 383–388, 2015. [44](#)
- [102] Casini, H., Huerta, M. Entanglement entropy for the n-sphere. *Physics Letters B*, **694** (2), 167–171, 2010. [45](#)
- [103] Casini, H., Huerta, R. C., Marina and, Yale, A. Mutual information and the F-theorem. *JHEP*, **10**, 003, 2015. [45](#), [233](#)
- [104] Bekenstein, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, **7** (8), 2333, 1973. [56](#)
- [105] Lloyd, S. Ultimate physical limits to computation. *Nature*, **406** (6799), 1047, 2000. [56](#)
- [106] Maldacena, J., Shenker, S. H., Stanford, D. A bound on chaos. *Journal of High Energy Physics*, **2016** (8), 106, 2016. [56](#)
- [107] Hooft, G. Dimensional reduction in quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9310026*, 1993. [56](#)
- [108] Susskind, L. The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, **36** (11), 6377–6396, 1995. [56](#), [94](#)
- [109] Klebanov, I. R., Tarnopolsky, G. On large n limit of symmetric traceless tensor models. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (10), 37, 2017. [57](#)
- [110] Nishioka, T., Ryu, S., Takayanagi, T. Holographic entanglement entropy: an overview. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42** (50), 504008, 2009. [58](#), [104](#)
- [111] Hubeny, V. E., Rangamani, M., Takayanagi, T. A Covariant holographic entanglement entropy proposal. *JHEP*, **07**, 062, 2007. [59](#), [191](#)

- [112] Brown, J. D., Henneaux, M. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three dimensional gravity. *Communications in Mathematical Physics*, **104** (2), 207–226, 1986. [59](#)
- [113] Headrick, M., Takayanagi, T. Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy. *Physical Review D*, **76** (10), 106013, 2007. [60](#), [124](#)
- [114] Bao, N., Nezami, S., Ooguri, H., Stoica, B., Sully, J., Walter, M. The holographic entropy cone. *Journal of High Energy Physics*, **2015** (9), 130, 2015. [61](#)
- [115] Wall, A. C. Maximin surfaces, and the strong subadditivity of the covariant holographic entanglement entropy. *Classical and Quantum Gravity*, **31** (22), 225007, 2014. [61](#)
- [116] Lin, J., Marcolli, M., Ooguri, H., Stoica, B. Locality of gravitational systems from entanglement of conformal field theories. *Physical review letters*, **114** (22), 221601, 2015. [61](#)
- [117] Koeller, J., Leichenauer, S. Holographic proof of the quantum null energy condition. *Physical Review D*, **94** (2), 024026, 2016. [62](#)
- [118] Komargodski, Z. The Constraints of Conformal Symmetry on RG Flows. *JHEP*, **07**, 069, 2012. [64](#), [65](#), [76](#), [81](#), [185](#), [189](#)
- [119] Cappelli, A., Friedan, D., Latorre, J. I. C theorem and spectral representation. *Nucl. Phys.*, **B352**, 616–670, 1991. [72](#), [94](#), [98](#), [124](#)
- [120] Polyakov, A. M. Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **39**, 23–42, 1974. [74](#)
- [121] Rychkov, S. *Epfl Lectures on Conformal Field Theory in D 3 Dimensions*. Springer, 2017. [74](#)
- [122] Osterwalder, K., Schrader, R. Axioms for euclidean green’s functions. *Communications in mathematical physics*, **31** (2), 83–112, 1973. [74](#)
- [123] Elvang, H., Freedman, D. Z., Hung, L.-Y., Kiermaier, M., Myers, R. C., Theisen, S. On renormalization group flows and the a-theorem in 6d. *Journal of High Energy Physics*, **2012** (10), 11, 2012. [76](#)
- [124] Schwimmer, A., Theisen, S. Spontaneous Breaking of Conformal Invariance and Trace Anomaly Matching. *Nucl. Phys.*, **B847**, 590–611, 2011. [81](#), [185](#), [188](#)
- [125] Anselmi, D. Anomalies, unitarity, and quantum irreversibility. *Annals of Physics*, **276** (2), 361–390, 1999. [94](#), [126](#)

- [126] Anselmi, D. Exact results on quantum field theories interpolating between pairs of conformal field theories. *arXiv preprint hep-th/9910255*, 1999.
- [127] Anselmi, D. A universal flow invariant in quantum field theory. *Classical and Quantum Gravity*, **18** (21), 4417, 2001.
- [128] Anselmi, D. Quantum irreversibility in arbitrary dimension. *Nuclear Physics B*, **567** (1-2), 331–359, 2000. [94](#), [126](#)
- [129] Larsen, F., Wilczek, F. Renormalization of black hole entropy and of the gravitational coupling constant. *Nuclear Physics B*, **458** (1-2), 249–266, 1996. [94](#), [95](#)
- [130] Fursaev, D. V., Solodukhin, S. N. On one-loop renormalization of black-hole entropy. *Physics Letters B*, **365** (1-4), 51–55, 1996.
- [131] Cooperman, J. H., Luty, M. A. Renormalization of entanglement entropy and the gravitational effective action. *Journal of High Energy Physics*, **2014** (12), 45, 2014.
- [132] Jacobson, T., Satz, A. Black hole entanglement entropy and the renormalization group. *Physical Review D*, **87** (8), 084047, 2013.
- [133] Solodukhin, S. N. One-loop renormalization of black hole entropy due to nonminimally coupled matter. *Physical Review D*, **52** (12), 7046, 1995.
- [134] Solodukhin, S. N. Newton constant, contact terms, and entropy. *Physical Review D*, **91** (8), 084028, 2015. [94](#)
- [135] Adler, S. L. Einstein Gravity as a Symmetry Breaking Effect in Quantum Field Theory. *Rev. Mod. Phys.*, **54**, 729, 1982. [Erratum: *Rev. Mod. Phys.*55,837(1983)]. [94](#), [96](#), [140](#)
- [136] Zee, A. Spontaneously Generated Gravity. *Phys. Rev.*, **D23**, 858, 1981. [94](#), [96](#)
- [137] Hertzberg, M. P., Wilczek, F. Some Calculable Contributions to Entanglement Entropy. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 050404, 2011. [95](#), [102](#), [137](#)
- [138] Kabat, D., Strassler, M. A comment on entropy and area. *Physics Letters B*, **329** (1), 46–52, 1994.
- [139] Hertzberg, M. P. Entanglement entropy in scalar field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46** (1), 015402, 2012. [95](#), [102](#)

- [140] Hung, L.-Y., Myers, R. C., Smolkin, M. Some calculable contributions to holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (8), 39, 2011. [95](#)
- [141] Lewkowycz, A., Myers, R. C., Smolkin, M. Observations on entanglement entropy in massive QFT's. *JHEP*, **04**, 017, 2013. [102](#), [104](#), [137](#)
- [142] Liu, H., Mezei, M. Probing renormalization group flows using entanglement entropy. *JHEP*, **01**, 098, 2014. [95](#), [137](#), [215](#)
- [143] Liu, H., Mezei, M. A refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (4), 162, 2013. [95](#)
- [144] Casini, H., Huerta, M. Remarks on the entanglement entropy for disconnected regions. *Journal of High Energy Physics*, **2009** (03), 048, 2009. [95](#)
- [145] Adler, S. L. Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory. *Reviews of Modern Physics*, **54** (3), 729, 1982. [96](#)
- [146] Muratani, H., Wada, S. Divergent parts of quantum fluctuation in curved space from the adler-zee formulas. *Physical Review D*, **29** (4), 637, 1984. [96](#)
- [147] Rosenhaus, V., Smolkin, M. Entanglement entropy, planar surfaces, and spectral functions. *Journal of High Energy Physics*, **2014** (9), 119, 2014. [97](#), [98](#), [137](#)
- [148] Rosenhaus, V., Smolkin, M. Entanglement entropy for relevant and geometric perturbations. *Journal of High Energy Physics*, **2015** (2), 15, 2015. [97](#), [98](#), [101](#)
- [149] Hung, L.-Y., Myers, R. C., Smolkin, M. Some Calculable Contributions to Holographic Entanglement Entropy. *JHEP*, **08**, 039, 2011. [101](#), [104](#), [137](#)
- [150] Ryu, S., Takayanagi, T. Aspects of Holographic Entanglement Entropy. *JHEP*, **08**, 045, 2006. [104](#), [197](#)
- [151] Ryu, S., Takayanagi, T. Holographic derivation of entanglement entropy from ads. *CFT, h ep-th/0603001*. [104](#)
- [152] Maldacena, J. Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *Journal of High Energy Physics*, **2003** (05), 013, 2003. [104](#), [111](#)
- [153] Kaplan, J., Wang, J. An effective theory for holographic rg flows. *Journal of High Energy Physics*, **2015** (2), 56, 2015. [104](#), [111](#), [114](#), [117](#), [126](#)
- [154] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Holographic RG flows, entanglement entropy and the sum rule. *JHEP*, **03**, 033, 2016. [104](#), [137](#)

- [155] Bianchi, M., Freedman, D. Z., Skenderis, K. Holographic renormalization. *Nuclear Physics B*, **631** (1-2), 159–194, 2002. [108](#)
- [156] Skenderis, K. Lecture notes on holographic renormalization. *Classical and Quantum Gravity*, **19** (22), 5849, 2002. [108](#)
- [157] Balasubramanian, V., Kraus, P. A stress tensor for anti-de sitter gravity. *Communications in Mathematical Physics*, **208** (2), 413–428, 1999. [109](#)
- [158] Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, **40** (9), 1997–2027, 2008. [109](#)
- [159] De Boer, J., Verlinde, E., Verlinde, H. On the holographic renormalization group. *Journal of High Energy Physics*, **2000** (08), 003, 2000. [109](#)
- [160] Papadimitriou, I., Skenderis, K. Ads/cft correspondence and geometry. *arXiv preprint hep-th/0404176*, 2004.
- [161] Papadimitriou, I., Skenderis, K. Correlation functions in holographic rg flows. *Journal of High Energy Physics*, **2004** (10), 075, 2004. [109](#)
- [162] Heemskerk, I., Polchinski, J. Holographic and wilsonian renormalization groups. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (6), 31, 2011. [109](#)
- [163] Faulkner, T., Liu, H., Rangamani, M. Integrating out geometry: Holographic wilsonian rg and the membrane paradigm. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (8), 51, 2011.
- [164] Dong, X., Horn, B., Silverstein, E., Torroba, G. Moduli stabilization and the holographic rg for ads and ds. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (6), 89, 2013. [109](#)
- [165] Fukuma, M., Matsuura, S., Sakai, T. A note on the weyl anomaly in the holographic renormalization group. *Progress of Theoretical Physics*, **104** (5), 1089–1108, 2000. [109](#)
- [166] Poisson, E. A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics. Cambridge university press, 2004. [109](#)
- [167] Bianchi, M., Freedman, D. Z., Skenderis, K. How to go with an rg flow. *Journal of High Energy Physics*, **2001** (08), 041, 2001. [114](#)
- [168] Berg, M., Samtleben, H. Holographic correlators in a flow to a fixed point. *Journal of High Energy Physics*, **2002** (12), 070, 2003. [114](#)

- [169] Hoyos, C., Kol, U., Sonnenschein, J., Yankielowicz, S. The a-theorem and conformal symmetry breaking in holographic rg flows. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (3), 63, 2013. [115](#)
- [170] Bajc, B., Lugo, A. R. On the matching method and the goldstone theorem in holography. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (7), 56, 2013. [115](#), [117](#)
- [171] Hoyos, C., Kol, U., Sonnenschein, J., Yankielowicz, S. The holographic dilaton. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (10), 181, 2013. [115](#), [117](#)
- [172] Casini, H., Huerta, M. Positivity, entanglement entropy, and minimal surfaces. *Journal of High Energy Physics*, **2012** (11), 87, 2012. [124](#)
- [173] Balasubramanian, V., Heckman, J. J., Maloney, A. Relative Entropy and Proximity of Quantum Field Theories. *JHEP*, **05**, 104, 2015. [126](#)
- [174] Gaiete, J. C. Relative entropy in field theory, the H theorem and the renormalization group. En: 3rd International Conference on Renormalization Group (RG 96) Dubna, Russia, August 26-31, 1996. 1996. [126](#)
- [175] Rosenhaus, V., Smolkin, M. Entanglement entropy, planar surfaces, and spectral functions. *JHEP*, **09**, 119, 2014. [137](#)
- [176] Rosenhaus, V., Smolkin, M. Entanglement Entropy for Relevant and Geometric Perturbations. *JHEP*, **02**, 015, 2015.
- [177] Rosenhaus, V., Smolkin, M. Entanglement entropy: a perturbative calculation. *Journal of High Energy Physics*, **2014** (12), 179, 2014. [137](#)
- [178] Bousso, R., Fisher, Z., Leichenauer, S., Wall, A. C. Quantum focusing conjecture. *Phys. Rev.*, **D93** (6), 064044, 2016. [145](#)
- [179] Bousso, R., Fisher, Z., Koeller, J., Leichenauer, S., Wall, A. C. Proof of the Quantum Null Energy Condition. *Phys. Rev.*, **D93** (2), 024017, 2016. [145](#)
- [180] Koeller, J., Leichenauer, S., Levine, A., Shahbazi Moghaddam, A. Local Modular Hamiltonians from the Quantum Null Energy Condition, 2017. [145](#)
- [181] Wiesbrock, H.-W. Half-sided modular inclusions of von-neumann-algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **157** (1), 83–92, 1993. [146](#), [161](#)
- [182] Witten, E. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**, 253–291, 1998. [150](#)
- [183] Weinberg, S. Six-dimensional Methods for Four-dimensional Conformal Field Theories. *Phys. Rev.*, **D82**, 045031, 2010. [150](#), [183](#)

- [184] Candelas, P., Dowker, J. S. Field theories on conformally related space-times: Some global considerations. *Phys. Rev.*, **D19**, 2902, 1979. [151](#)
- [185] Komargodski, Z., Zhiboedov, A. Convexity and Liberation at Large Spin. *JHEP*, **11**, 140, 2013. [154](#)
- [186] Wald, R. M. General relativity. University of Chicago press, 2010. [159](#)
- [187] Borchers, H.-J. The cpt-theorem in two-dimensional theories of local observables. *Communications in Mathematical Physics*, **143** (2), 315–332, 1992. [161](#)
- [188] Borchers, H. Symmetry groups of c-algebras and associated von neumann algebras. *Dynamics of Complex and Irregular Systems*, págs. 12–21, 1993. [163](#)
- [189] Borchers, H. On modular inclusion and spectrum condition. *letters in mathematical physics*, **27** (4), 311–324, 1993. [163](#)
- [190] Strominger, A. Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory, 2017. [169](#)
- [191] Casini, H., Huerta, M. Remarks on the entanglement entropy for disconnected regions. *JHEP*, **03**, 048, 2009. [178](#)
- [192] Swingle, B. Mutual information and the structure of entanglement in quantum field theory, 2010. [178](#)
- [193] Solodukhin, S. N. The a-theorem and entanglement entropy, 2013. [181](#), [185](#), [222](#)
- [194] Penedones, J. TASI lectures on AdS/CFT. En: Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015, págs. 75–136. 2017. URL <https://inspirehep.net/record/1481834/files/arXiv:1608.04948.pdf>. [183](#)
- [195] Kapec, D., Mitra, P. A d -Dimensional Stress Tensor for Mink_{d+2} Gravity, 2017. [183](#)
- [196] Elvang, H., Freedman, D. Z., Hung, L.-Y., Kiermaier, M., Myers, R. C., Theisen, S. On renormalization group flows and the a-theorem in 6d. *JHEP*, **10**, 011, 2012. [185](#), [189](#), [223](#)
- [197] Luty, M. A., Polchinski, J., Rattazzi, R. The a -theorem and the Asymptotics of 4D Quantum Field Theory. *JHEP*, **01**, 152, 2013. [185](#)
- [198] Elvang, H., Olson, T. M. RG flows in d dimensions, the dilaton effective action, and the a-theorem. *JHEP*, **03**, 034, 2013. [185](#), [189](#), [190](#)

- [199] Banerjee, S. Wess-Zumino Consistency Condition for Entanglement Entropy. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 010402, 2012. [185](#)
- [200] Banerjee, S. Trace Anomaly Matching and Exact Results For Entanglement Entropy, 2014.
- [201] Herzog, C. P., Huang, K.-W., Jensen, K. Universal Entanglement and Boundary Geometry in Conformal Field Theory. *JHEP*, **01**, 162, 2016. [185](#), [189](#)
- [202] Wess, J., Zumino, B. Consequences of anomalous Ward identities. *Phys. Lett.*, **37B**, 95–97, 1971. [187](#), [188](#)
- [203] Deser, S., Schwimmer, A. Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions. *Phys. Lett.*, **B309**, 279–284, 1993. [188](#)
- [204] Polchinski, J. String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string. Cambridge University Press, 2007. [188](#)
- [205] Weinberg, S. Gravitation and Cosmology. New York: John Wiley and Sons, 1972. URL <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC6.W431>. [189](#)
- [206] Neuenfeld, D., Saraswat, K., Van Raamsdonk, M. Positive gravitational subsystem energies from CFT cone relative entropies, 2018. [195](#)
- [207] Dong, X. Holographic Entanglement Entropy for General Higher Derivative Gravity. *JHEP*, **01**, 044, 2014. [199](#)
- [208] Camps, J. Generalized entropy and higher derivative Gravity. *JHEP*, **03**, 070, 2014. [199](#)
- [209] Dong, X., Lewkowycz, A. Entropy, Extremality, Euclidean Variations, and the Equations of Motion. *JHEP*, **01**, 081, 2018. [200](#)
- [210] Hung, L.-Y., Myers, R. C., Smolkin, M. On Holographic Entanglement Entropy and Higher Curvature Gravity. *JHEP*, **04**, 025, 2011. [200](#)
- [211] Faulkner, T., Lewkowycz, A., Maldacena, J. Quantum corrections to holographic entanglement entropy. *JHEP*, **11**, 074, 2013. [201](#)
- [212] Huerta, M. Numerical Determination of the Entanglement Entropy for Free Fields in the Cylinder. *Phys. Lett.*, **B710**, 691–696, 2012. [215](#)
- [213] Dong, X. The Gravity Dual of Renyi Entropy. *Nature Commun.*, **7**, 12472, 2016. [222](#)

Publicaciones asociadas

1. All the entropies on the light-cone. Casini, H., Testé, E., Torroba, G. arXiv, hep-th, 1802.04278, 2018.
2. Markov Property of the Conformal Field Theory Vacuum and the a Theorem. Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Phys. Rev. Lett., 118 (26), 261602, 2017.
3. Modular hamiltonians on the null plane and the markov property of the vacuum state. Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 50 (36), 364001, 2017
4. Relative entropy and the RG flow. Casini, H., Testé, E., Torroba, G. JHEP, 03, 089, 2017.
5. Holographic RG flows, entanglement entropy and the sum rule. Casini, H., Testé, E., Torroba, G. JHEP, 03, 033, 2016.
6. Area terms in entanglement entropy. Casini, H., Mazzitelli, F. D., Testé, E. Phys. Rev., D91 (10), 104035, 2015.

Agradecimientos

Deseo expresar mi total agradecimiento a mi director y amigo Horacio Casini por muchas cosas, y a todos los profesores del Instituto Balseiro que contribuyeron a mi formación, en particular, a Marina Huerta y Gonzalo Torroba. Mi doctorado fue financiado por una beca de CONICET, Argentina. También agradezco a la colaboración “It from qubit”, financiada por la Fundación Simons.

